

Technische Universität Dresden
Fakultät Maschinenwesen
Institut für Luft- und Raumfahrttechnik
Professur für Thermofluiddynamik/Angewandte Aerodynamik
Prof. Dr.-Ing. Roger Grundmann

Aerodynamik

Dieser Studienbrief zur Vorlesung *Aerodynamik/Flugmechanik* basiert überwiegend auf den Kapiteln 2 bis 6 des Buches *Fundamentals of Aerodynamics* von John D. Anderson jr.; McGraw-Hill Book Co., 2. Edition, 1991

Inhaltsverzeichnis

Berechnungsverfahren für Profil- und Tragflügelumströmungen

1	Definitionen in der Aerodynamik.....	5
1.1	Stromlinien und Streichlinien.....	5
1.2	Winkelgeschwindigkeit und Drehung.....	9
1.3	Zirkulation.....	12
1.4	Stromfunktion.....	13
1.5	Geschwindigkeitspotential.....	17
Zweidimensionale Berechnungsverfahren		
2	Zweidimensionale Potentialströmungen.....	19
2.1	Reibungsfreie inkompressible Strömungen.....	19
2.2	Komplexes Potential.....	21
2.3	Elementare Strömungen.....	26
2.3.1	Parallelströmung.....	26
2.3.2	Quellen- und Senkenströmung.....	28
2.3.3	Dipolströmung.....	30
2.3.4	Potentialwirbelströmung.....	32
2.3.5	Wirbelschichtströmung.....	33
2.4	Superpositionsprinzip.....	36
2.4.1	Quelle in einer Parallelströmung.....	37
2.4.2	Quelle und Senke in einer Parallelströmung.....	41
2.4.3	Dipol in einer Parallelströmung.....	43
2.4.4	Dipol und Potentialwirbel in einer Parallelströmung.....	46

3 Konforme Abbildungen.....	55
3.1 Eigenschaften der Transformation.....	55
3.2 Elementare Transformationsvorschriften.....	58
3.2.1 Transformation von Parallelströmungen.....	58
3.2.2 Quadratische Transformation.....	59
3.2.3 Transformation nach Joukowski.....	61
3.2.4 Parallelströmung um eine ebene angestellte Platte.....	63
3.3 Anwendungen der konformen Abbildungen.....	67
3.3.1 Allgemeine Bemerkungen.....	67
3.3.2 Joukowsky–Transformation.....	69
3.3.3 Modifizierte Joukowsky–Transformation.....	74
4 Linearisierte Theorie dünner Profile.....	77
4.1 Prinzip der Theorie dünner Profile.....	77
4.2 Induzierte Geschwindigkeiten durch Singularitätenverteilungen.....	80
4.3 Skelettlínie und Effekte des Anstellwinkels.....	83
4.4 Dickenverteilung.....	86
4.5 Gekrümmte Profile mit Dickenverteilung.....	88
5 Panel–Methode für Profilumströmungen.....	91
5.1 Methode diskreter Singularitätenverteilungen.....	91
5.2 Profile ohne Auftrieb.....	92
5.3 Profile mit Auftrieb.....	96
5.4 Bemerkungen zur Panel–Methode.....	98

Dreidimensionale Berechnungsverfahren

6 Definitionen zur Tragflügelumströmung.....	101
6.1 Grundsätzliche Annahmen.....	101
6.2 Geometrische Verhältnisse.....	102
6.3 Wirbel und Wirbelschicht im dreidimensionalen Raum.....	103
6.3.1 Biot–Savart–Gesetz.....	103
6.3.2 Wirbelschicht in dreidimensionaler Strömung.....	105
7 Traglinientheorie.....	111
7.1 Einführung in die Traglinientheorie.....	111
7.1.1 Geometrie.....	112
7.1.2 Strömungsablenkwinkel.....	112
7.1.3 Zirkulation.....	113
7.1.4 Gesamtauftriebsbeiwert.....	114
7.1.5 Induzierter Widerstand.....	115
7.2 Fundamentale Gleichung von Prandtl.....	116
7.3 Elliptischer Tragflügel.....	118
7.4 Allgemeine Tragflügelkonturen.....	122
8 Tragflächentheorie.....	129
8.1 Einführung in die Tragflächentheorie.....	129
8.2 Induzierte Geschwindigkeit.....	133
8.3 Wirbelgittermethode.....	136
8.4 Vereinfachte Wirbelgittermethode.....	137
8.5 Anwendungen der Tragflügelberechnungsmethoden.....	138

1 Definitionen in der Aerodynamik

1.1 Stromlinien und Streichlinien

Eine instationäre Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ ist innerhalb eines kartesischen Koordinatensystems mit den Achsen x , y und z und der Zeit t gegeben. In dem so beschriebenen Strömungsfeld wird ein infinitesimal kleines Strömungsvolumen gezwungen, sich durch den dreidimensionalen Raum zu bewegen. Volumen A und B werden verschiedenen Pfaden folgen, wenn sie zu verschiedenen Zeiten aber durch denselben Raumpunkt 1 gehen. Dieser Zustand ist in Bild 1.1 dargestellt.

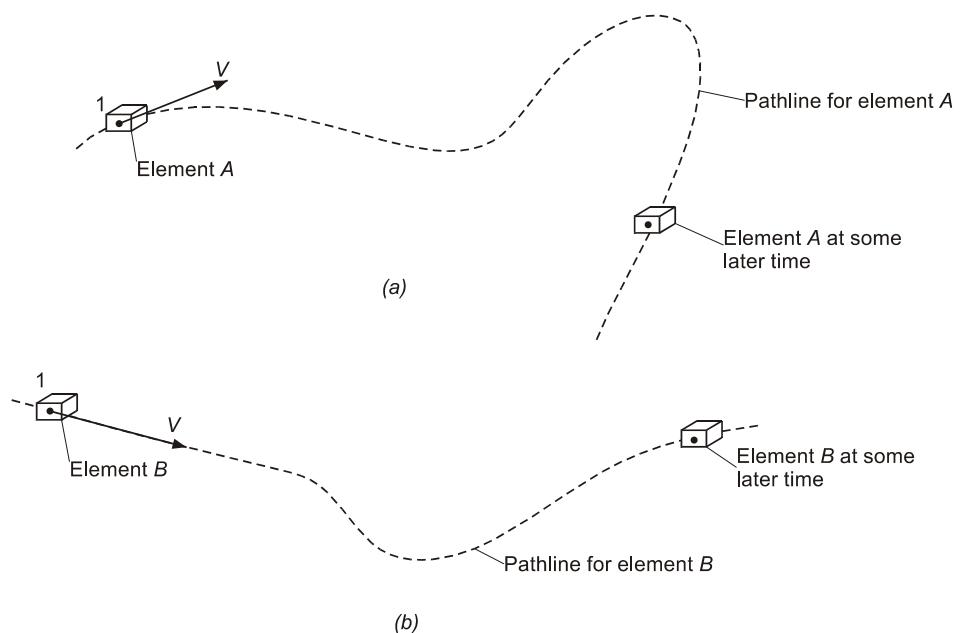


Bild 1.1 Streichlinien für zwei verschiedene Volumen zu verschiedenen Zeiten durch denselben Raumpunkt 1 gehend

Die Linien, entlang denen sich die Volumen in *instationärer* Strömung bewegen, werden *Streichlinien* genannt.

Durch Definition werden Linien, an der der Geschwindigkeitsvektor in jedem Punkt tangential anliegt, *Stromlinien* genannt. Bild 1.2 zeigt Stromlinien mit den zugehörigen Geschwindigkeitsvektoren für das Beispiel einer Profilumströmung.

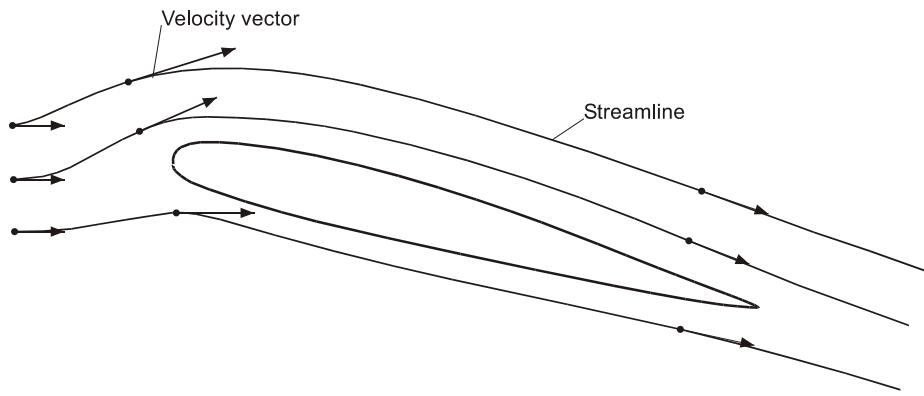


Bild 1.2 Stromlinien mit Geschwindigkeitsvektoren in einer Profilumströmung

In Bild 1.2 bleibt die Strömung weiterhin instationär und demzufolge ändert sich das Strömungsfeld mit der Zeit.

Streichlinien sind mit fotografischen Langzeitaufnahmen einzelner Volumen, die sich durch den Raum bewegen, zu vergleichen, während Stromlinien Momentaufnahmen von Raumkurven darstellen, entlang denen der Geschwindigkeitsvektor tangential ist. Da an einer und derselben Stelle keine zwei Geschwindigkeiten herrschen können, dürfen sich Stromlinien auch nie schneiden. An Raumpunkten, wie beispielsweise Staupunkten, an denen die Geschwindigkeit null herrscht, können allerdings mehrere Stromlinien zusammenkommen.

Im Fall *stationärer* Strömung in Bild 1.3 sind Strom- und Streichlinien identisch, da hier die Geschwindigkeitsvektoren an jedem Punkt tangential an der Kurve anliegen, entlang der die Volumen von einem Ausgangspunkt ausgehend durch den Raum treiben.

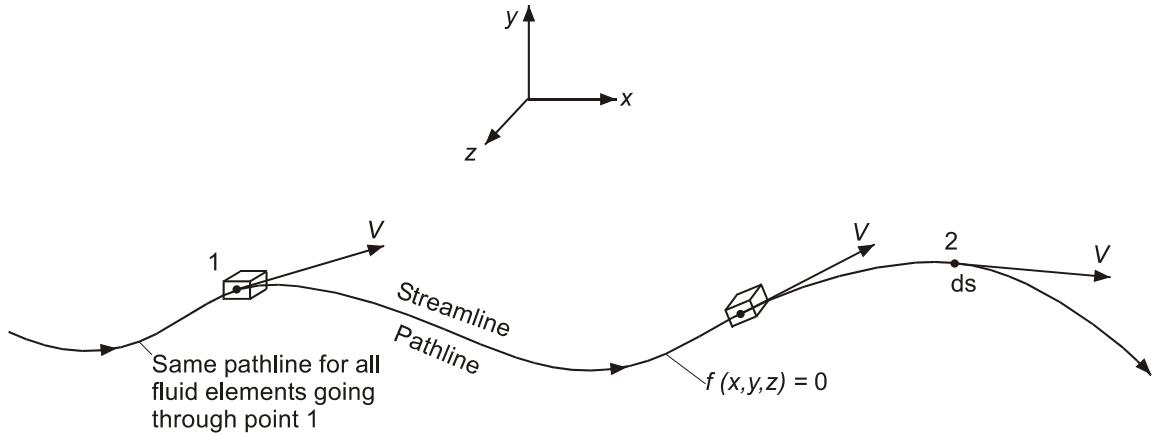


Bild 1.3 Stromlinien entsprechen Streichlinien im Fall stationärer Strömung

Die Gleichung der Stromlinie für stationäre Strömungen $f(x,y,z) = 0$ kann durch den Gebrauch der Eigenschaften eines Vektorkreuzproduktes ermittelt werden. Die Geschwindigkeit \vec{V} und das Wegelement $d\vec{s}$ sind entlang einer Stromlinie durch Definition parallel zu einander. Das Vektorkreuzprodukt daraus ist null.

$$d\vec{s} \times \vec{V} = 0 \quad (1.1)$$

In kartesischen Koordinaten sind $d\vec{s}$ und \vec{V} :

$$d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (1.2)$$

und

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \quad (1.3)$$

Die Beträge der Komponenten des Längenelementes $d\vec{s}$ sind dx , dy , und dz , desgleichen sind u , v , und w die Beträge der Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \vec{V} . Die räumliche Richtung geben die Basis- oder Einheitsvektoren im kartesischen Raum \vec{i} , \vec{j} und \vec{k} an.

Das Kreuzprodukt der Gl. (1.1) ergibt dann:

$$d\vec{s} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

(1.4)

$$= \vec{i}(w dy - v dz) + \vec{j}(u dz - w dx) + \vec{k}(v dx - u dy) = 0$$

Da der Vektor null sein soll, müssen auch jede seiner Komponenten null sein.

$$w dy - v dz = 0$$

$$u dz - w dx = 0 \quad (1.5)$$

$$v dx - u dy = 0$$

Da u , v , und w als Funktionen von x , y und z bekannt sind, kann der Satz von Differentialgleichungen, Gln. (1.5), integriert werden und es ergibt sich die Stromfunktion $f(x, y, z) = 0$. Bild 1.4 demonstriert die physikalische Bedeutung der Gln. (1.5) für eine zweidimensionale Strömung.

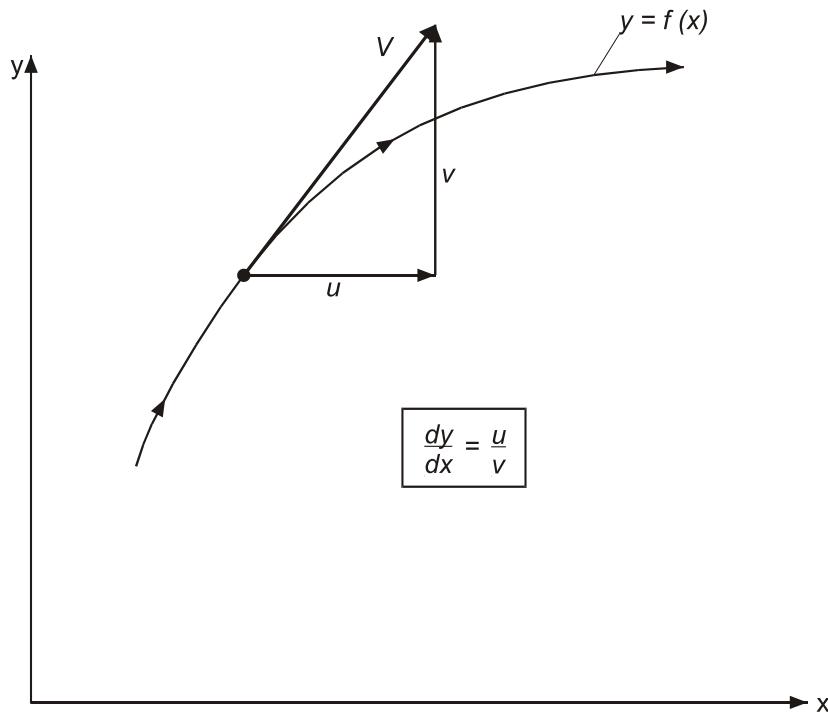


Bild 1.4 Gleichung einer Stromlinie im zweidimensionalen Raum

1.2 Winkelgeschwindigkeit und Drehung

Wenn dem Fluidvolumen erlaubt wird, sich zu drehen, und wenn weiterhin seine Kontur sich scheren darf, während es einer Stromlinie folgt, wird das Konzept der Rotation wichtig. Dieses Konzept beinhaltet ein wichtiges Werkzeug zur Lösung der strömungsmechanischen Gleichungen.

In Bild 1.5 wird ein zweidimensionales Strömungsvolumen beobachtet, das auf seinem Weg von der unteren linken Seite zur oberen rechten eine translatorische Bewegung ausführt, dabei rotiert und dessen begrenzende Seiten scheren.

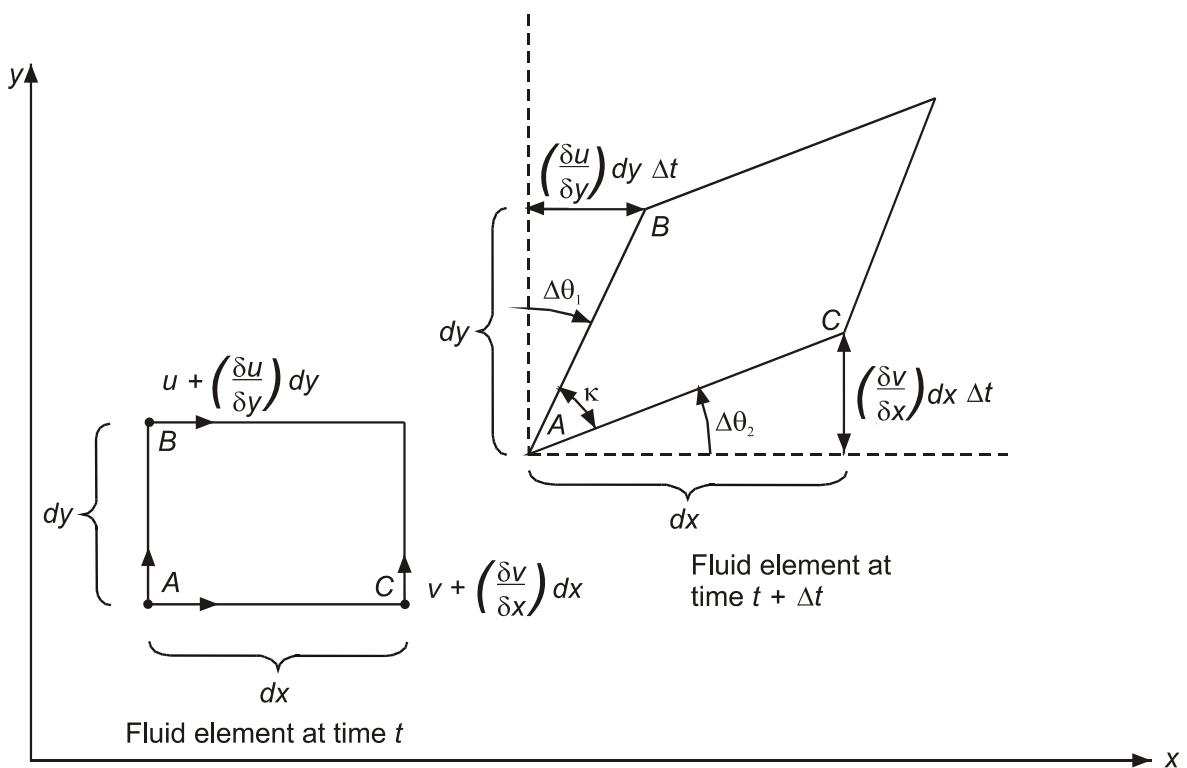


Bild 1.5 Rotation und Scherung eines Fluidvolumen während einer Translationsbewegung

Zum Beispiel sind die sich verändernden Abstände des Fluidvolumens A und C während des Zeitelementes Δt mit der Translationsbewegung zu beschreiben.

$$\text{Bewegung von } A \text{ während } \Delta t \Rightarrow v \Delta t = y_A$$

$$\text{Bewegung von } C \text{ während } \Delta t \Rightarrow \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \Delta t = y_C$$

$$\text{Differenz von } A \text{ zu } C \text{ während } \Delta t \Rightarrow \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \Delta t - v \Delta t \quad (1.6)$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \Delta t = y_C - y_A$$

Die Winkel $\Delta\theta_1$ und $\Delta\theta_2$ können über geometrische Betrachtungen aus Bild 1.5 entnommen werden.

$$\begin{aligned} \tan(-\Delta\theta_1) &= \frac{[(\partial u / \partial y) dy] \Delta t}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta t \\ \tan \Delta\theta_2 &= \frac{[(\partial v / \partial x) dx] \Delta t}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t \end{aligned} \quad (1.7)$$

Im Fall kleiner Winkel gilt:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1 &= -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta t \\ \Delta\theta_2 &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t \end{aligned} \quad (1.8)$$

Hiermit können die Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Linien AB und AC als $d\theta_1/dt$ und $d\theta_2/dt$ definiert und berechnet werden.

$$\frac{d\theta_1}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.9)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Nach einer Definition ist die Winkelgeschwindigkeit in der x - y -Ebene ω_z des Fluidvolumens der Mittelwert beider Winkelgeschwindigkeiten der Gln. (1.9).

$$\begin{aligned}\omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (1.10)$$

Entlang einer beliebigen Kurve im dreidimensionalen Raum wird die Winkelgeschwindigkeit ein Vektor $\vec{\omega}$.

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (1.11)$$

Die verbleibenden Beträge der Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors ω_x und ω_y können in derselben Weise, wie vorher beschrieben, entwickelt werden.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \quad (1.12)$$

Die Rotation ist folgendermaßen definiert:

$$\xi \equiv 2 \vec{\omega} \quad (1.13)$$

Damit ergibt sich aus Gl. (1.11):

$$\xi = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (1.14)$$

In abgekürzter Vektorschreibweise wird daraus:

$$\xi = \nabla \times \vec{V} \quad (1.15)$$

Als Schlußfolgerung ergibt sich, daß die Drehung in einem Geschwindigkeitsfeld die Rotation der Geschwindigkeit ist. Das führt zu zwei wichtigen Schlüssen:

- Wenn an jedem Punkt in der Strömung $\nabla \times \vec{V} \neq 0$ ist, wird die Strömung *rotations-* oder *drehungsbehaftet* genannt. Das setzt voraus, daß die Fluidvolumen eine endliche Winkelgeschwindigkeit haben.
- Wenn an jedem Punkt in der Strömung $\nabla \times \vec{V} = 0$ ist, wird die Strömung *rotations-* oder *drehungsfrei* genannt. Das setzt voraus, daß die Fluidvolumen keine endliche Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ haben, die Strömung verläuft ausschließlich translatorisch.

1.3 Zirkulation

Für die Berechnung des Auftriebs ist die Zirkulation eine wichtige Größe. Ihre Definition ist durch Bild 1.6 gegeben.

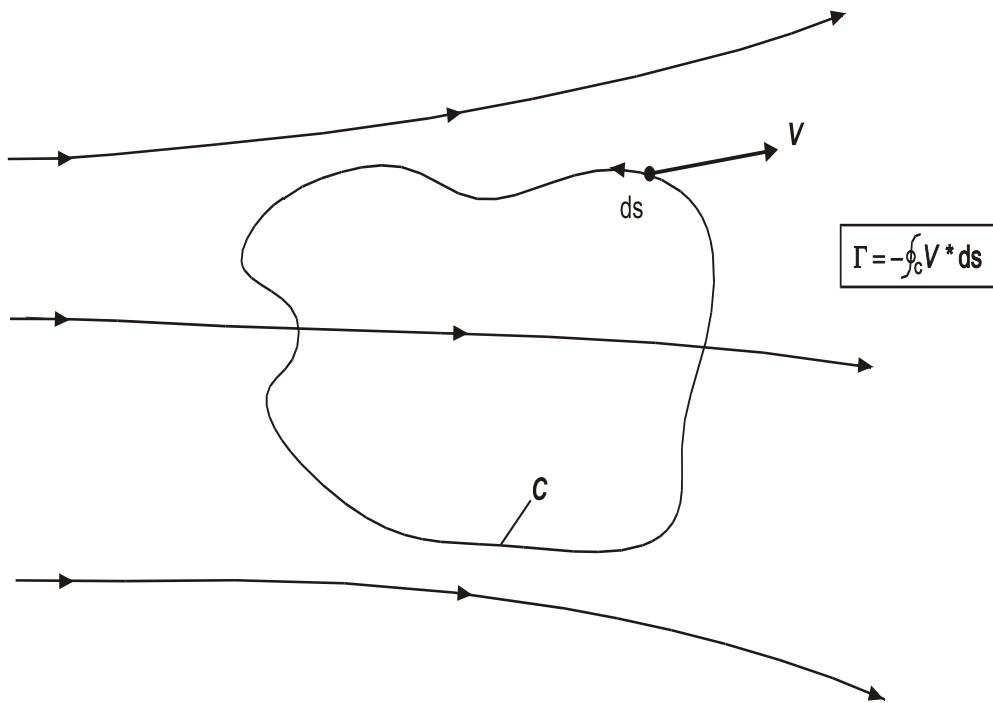


Bild 1.6 Definition der Zirkulation

C ist eine geschlossene Linie im Strömungsfeld. \vec{V} ist der Geschwindigkeitsvektor und $d\vec{s}$ ist ein im Raum gerichtetes Linienelement auf der Linie C . Die *Zirkulation* Γ ist damit als Linienintegral definierbar.

$$\Gamma \equiv - \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (1.16)$$

Die Zirkulation hat *nicht* die Bedeutung, daß sich ein Fluidvolumen auf kreisförmigen Bahnen bewegen wird. Die Aussage der Gl. (1.16) ist lediglich, daß das Integral endlich sein kann, wenn die Strömung zirkulationsbehaftet ist.

Mit Hilfe des *Stokeschen Theorems* ist die Zirkulation auch auf die Drehung zu beziehen.

$$\Gamma \equiv - \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = - \iint_S (\nabla \times \vec{V}) d\vec{S} \quad (1.17)$$

Diese Gleichung sagt unmittelbar aus, daß keine Zirkulation vorhanden ist, wenn $\nabla \times \vec{V} = 0$ gilt.

Ein anderes Resultat von Gl. (1.17) ist, daß es eine infinitesimal kleine Zirkulation $d\Gamma$ existiert, wenn die geschlossene Kurve C aus Bild 1.6 auf eine infinitesimale Größe geschrumpft wird.

$$\begin{aligned} d\Gamma &= - (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} \\ &= - (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (1.18)$$

oder

$$(\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} = - \frac{d\Gamma}{dS} \quad (1.19)$$

1.4 Stromfunktion

Die Gleichung für die Stromfunktion wurde bereits für den zweidimensionalen Raum in Bild 1.4 und Gl. (1.5) vorgegeben.

$$\frac{dy}{dz} = \frac{v}{u} \quad (1.20)$$

Gl. (1.20) kann integriert werden und das ergibt:

$$f(x,y) = c \quad (1.21)$$

Darin ist c eine Integrationskonstante. Die Funktion $f(x,y)$ kann beliebig umbenannt werden, beispielsweise in $\bar{\psi}(x,y)$, die den Namen Stromfunktion erhalten hat.

$$\bar{\psi}(x,y) = c \quad (1.22)$$

In Bild 1.7 werden zwei verschiedene Stromlinien $\bar{\psi} = c_1$ und $\bar{\psi} = c_2$ gezeigt.

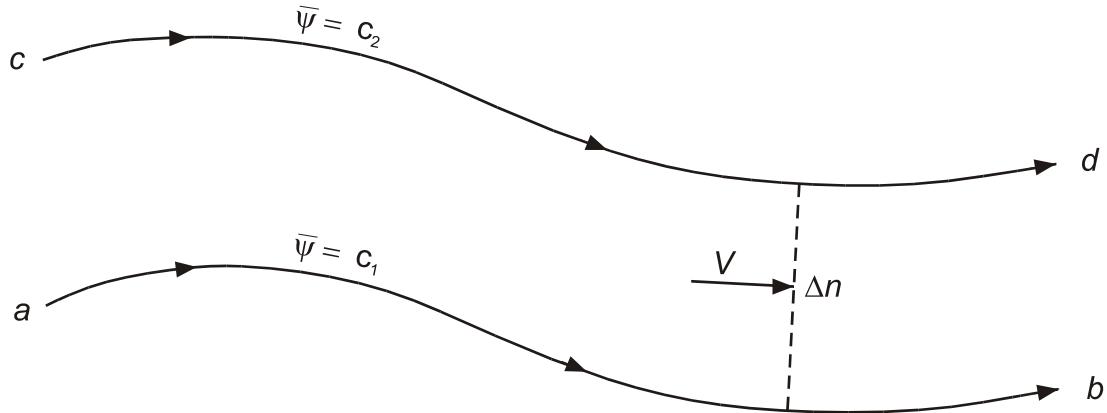


Bild 1.7 Darstellung zweier unterschiedlicher Stromlinien durch zwei unterschiedliche Werte der Stromfunktion

Die Differenz zwischen den beiden Werten der Stromfunktionen definiert den Massenstrom zwischen den zwei einer *Stromröhre* begrenzenden Stromlinien.

$$\Delta \bar{\psi} = c_2 - c_1 \quad (1.23)$$

Die beiden Konstanten c_1 und c_2 sind weiterhin willkürlich.

Aber $\Delta \bar{\psi}$ – was den Massenstrom durch eine Fläche mit einer Einheitstiefe darstellt – kann auch anders definiert werden, wenn in Bild 1.7 der Abstand Δn normal zwischen den

beiden Stromlinien sehr gering ist und demzufolge die Geschwindigkeit über den Abstand als konstant angenommen werden kann.

$$\Delta \bar{\psi} \equiv \rho V \Delta n \quad (1.24)$$

oder

$$\frac{\Delta \bar{\psi}}{\Delta n} = \rho V \quad (1.25)$$

Hierin bedeutet ρ die Dichte des Fluids.

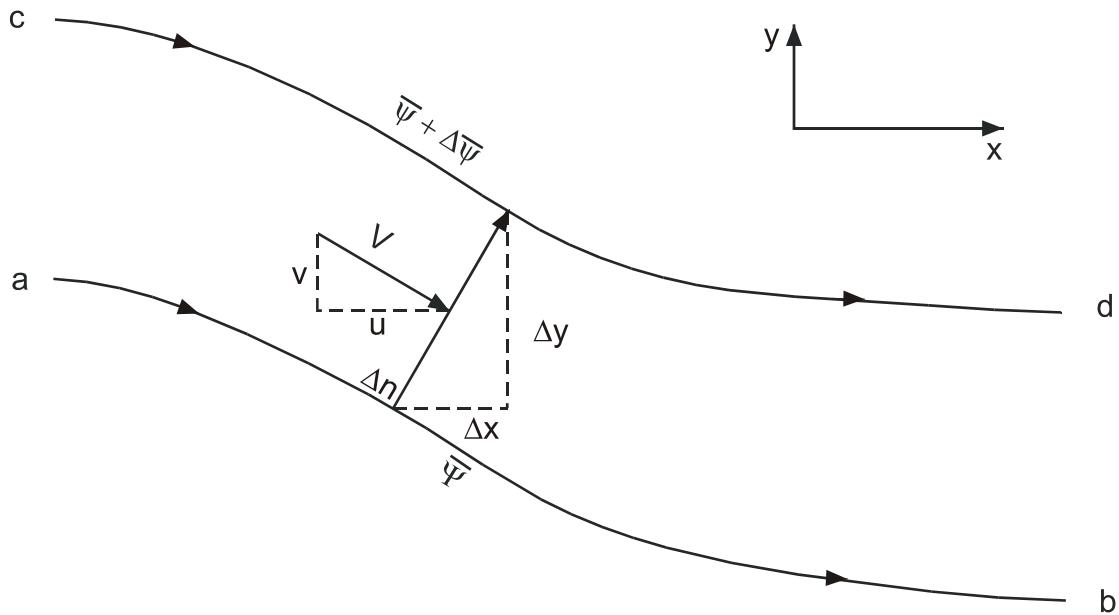


Bild 1.8 Massenfluß durch Δn als Summe der Flüsse durch Δx und Δy

Der Grenzübergang von Gl. (1.25) für infinitesimal kleines Δn führt zu:

$$\rho V = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\psi}}{\Delta n} \equiv \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} \quad (1.26)$$

In kartesischen Koordinaten wird nach Bild 1.8 der Massenstrom $\Delta \bar{\psi}$:

$$\begin{aligned}\Delta \bar{\psi} &= \rho V \Delta n \\ &= \rho u \Delta y + \rho (-v) \Delta x\end{aligned}\tag{1.27}$$

Wenn Δn gegen null geht, geschieht ein Grenzübergang und aus Gl. (1.27) wird:

$$d\bar{\psi} = \rho u dy - \rho v dx\tag{1.28}$$

Wendet man die Kettenregel auf die Stromfunktion $\Delta \bar{\psi}$ an, dann ergibt das:

$$d\bar{\psi} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} dy\tag{1.29}$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten von $d\bar{\psi}$ in den Gln. (1.28) und (1.29), so erkennt man, daß die Ableitungen der Stromfunktion den Geschwindigkeitskomponenten u und v multipliziert mit der Dichte ρ entspricht.

$$\begin{aligned}\rho u &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \\ \rho v &= -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\end{aligned}\tag{1.30}$$

Im Fall einer inkompressiblen Strömung ist die Dichte ρ konstant und eine neue Stromfunktion kann definiert werden.

$$\psi \equiv \frac{\bar{\psi}}{\rho}\tag{1.31}$$

Damit wird aus Gl. (1.26):

$$V = \frac{\partial(\bar{\psi}/\rho)}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial n}\tag{1.32}$$

und aus den Gln. (1.30):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1.33)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Nimmt man an, daß die Stromfunktionen für kompressible Strömungen $\bar{\psi}(x, y)$ oder die für inkompressible $\psi(x, y)$ innerhalb einer zweidimensionalen Strömung bekannt sind, so ergeben sich zwei Schlüsse:

- $\bar{\psi}(x, y) = \text{konstant}$ oder $\psi(x, y) = \text{konstant}$ liefert die Gleichungen für Stromlinien, Gl. (1.22).
- Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors können aus der Differentiation von $\bar{\psi}(x, y)$ oder $\psi(x, y)$ gewonnen werden, Gl. (1.33).

1.5 Geschwindigkeitspotential

Die Drehung für rotationsfreie Strömungen in jedem Raumpunkt ist gleich null nach Gl. (1.15).

$$\xi = \nabla \times \vec{V} = 0 \quad (1.34)$$

Dieses Produkt ist auch null für die folgende Vektoridentität, wenn der Gradient einer skalaren Funktion ϕ eingeführt wird.

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (1.35)$$

Beim Vergleich der beiden Gln. (1.34) und (1.35) fällt auf, daß für drehungsfreie Strömungen eine skalare Funktion ϕ so existiert, daß ihre Differentiation nach den Raumkoordinaten die Geschwindigkeitskomponenten ergeben.

$$V = \nabla \phi \quad (1.36)$$

Die skalare Funktion ϕ wird *Geschwindigkeitspotential* genannt. In einem kartesischen Koordinatensystem wird daraus:

$$u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad (1.37)$$

Nun können die Koeffizienten vor den Einheitsvektoren der Gl. (1.37) verglichen werden.

Das Ergebnis ist:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Das Geschwindigkeitspotential steht in dem Sinn in Analogie zu der Stromfunktion, als die Ableitungen von ϕ die Geschwindigkeitskomponenten ergeben. Jedoch sind einige bestimmte Unterschiede zwischen ϕ und ψ zu erkennen.

- Die Geschwindigkeitskomponenten sind durch Differentiation von ϕ nach *derselben* Richtung der Geschwindigkeitskomponenten zu erhalten. Für ψ muß die Differentiation in *normaler* Richtung dazu stattfinden.
- Das *Geschwindigkeitspotential* ist ausschließlich für *drehungsfreie* Strömungen definiert. Dagegen ist die *Stromfunktion* für *drehungsfreie* wie für *drehungsbehaftete* Strömungen gültig.
- Das *Geschwindigkeitspotential* kann für *dreidimensionale* Strömungen angewendet werden. Die *Stromfunktion* ist nur für *zweidimensionale* Strömungen anwendbar.

Für drehungsfreie Strömungen muß nur eine Gleichung für das Geschwindigkeitspotential ϕ gelöst werden. Die Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich aus Gln. (1.38). Derartige Strömungen werden *Potentialströmungen* genannt.

Zweidimensionale Berechnungsverfahren

2 Zweidimensionale Potentialströmungen

2.1 Reibungsfreie inkompressible Strömungen

Die Annahmen, daß eine Strömung stationär, zweidimensional, reibungsfrei und inkompressibel sei, vereinfacht die Schwierigkeiten bereits erheblich, die mit der Lösung der Bewegungsgleichungen dieser Strömung verbunden sind. Eine weitere Annahme, nämlich die der *Potentialströmung* oder gleichbedeutend der *Drehungsfreiheit* aus Kapitel 1 gemäß Gl. (1.15), ermöglicht eine nochmalige erhebliche Vereinfachung, von der man so oft wie möglich Gebrauch machen sollte. Vorausgesetzt sei allerdings, daß das Strömungsproblem diese Vereinfachungen erträgt.

Für viele praktische Fälle liefert die Annahme von Potentialströmungen zufriedenstellende Vorhersagen der Strömungseigenschaften, wenn man sich außerhalb von Grenzschichten oder Nachläufen befindet. Insbesondere werden vernünftige Ergebnisse um Körper mit guten aerodynamischen Konturen erzielt, an denen erst am Ende des Körpers Ablösungen auftreten.

Ziemlich gute Übereinstimmungen von Messungen und Berechnungen von Geschwindigkeits- und Druckfeldern können daher für Umströmungen von Tragflügelprofilen erwartet werden. Der Anwendung auf Profile wird deshalb hier besondere Bedeutung beigemessen.

Die Vereinfachungen, die durch die Annahme von Potentialströmungen entstehen, werden im Weiteren demonstriert. Die *Kontinuitätsgleichung* und die *Navier–Stokes Gleichungen* reduzieren sich im Fall stationärer, zweidimensionaler Strömungen für ein rei-

bungsfreies und inkompressibles Fluid ohne sonstige Volumenkräfte auf die Kontinuitätsgleichung und die beiden Bewegungsgleichungen in x - und y -Richtung, die sogenannten *Euler-Gleichungen*:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Euler-Gleichungen:

Bewegungsgleichung in x -Richtung

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.2)$$

Bewegungsgleichung in y -Richtung

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.3)$$

Für die drei unbekannten Größen u , v und p , welche die Geschwindigkeitskomponenten in den x - und y -Richtungen und den Druck darstellen, stehen drei Gleichungen zur Verfügung.

Obwohl die strömungsmechanischen Gleichungen, Gln. (2.1) bis (2.3), schon sehr vereinfacht sind, ist ihre Lösung für den allgemeinen Fall dennoch sehr aufwendig.

Die bereits besprochene Annahme der *Drehungsfreiheit* erlaubt eine weitere Reduktion des Lösungsaufwands.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.4)$$

Diese Gleichung wird benötigt, um nach Addition der Gl. (2.2) multipliziert mit dx und Gl. (2.3) multipliziert mit dy eine weitere Vereinfachung zu erzielen.

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy &= - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \\ &= - \frac{1}{\rho} dp \end{aligned} \quad (2.5)$$

Gl. (2.4) wird dann in Gl. (2.5) eingesetzt.

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy &= u \, du + v \, dv \\ &= -\frac{1}{\rho} \, d \, p \end{aligned} \quad (2.6)$$

Das ergibt zusammengefaßt:

$$\frac{1}{2} \, d \left(u^2 + v^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \, d \, p \quad (2.7)$$

oder auch in Integralform geschrieben:

$$\frac{\rho}{2} \left(u^2 + v^2 \right) + p = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 + p_\infty = \text{konstant} \quad (2.8)$$

Gl. (2.7) wird auch *Euler–Gleichung* genannt und Gl. (2.8), die integrierte Form davon *Bernoulli–Gleichung*. Die Konstante in Gl. (2.8) hat ein und denselben Wert im gesamten Strömungsfeld.

Die Gln. (2.1) und (2.4) sind *kinematische Gleichungen*, die nur die beiden unbekannten Größen u und v enthalten. Das gesamte Strömungsfeld ist somit bekannt, wenn nur diese beiden Gleichungen gelöst werden. Sehr nützliche Methoden zur Lösung dieser Gleichungen werden im Folgenden aufgezeigt werden.

Nachdem u und v bestimmt worden sind, werden sie in die Bernoulli–Gleichung, Gl. (2.8) eingesetzt und führen zur Bestimmung des Druckes p . Aus diesem Grund wird in den folgenden Abschnitten besonderer Wert auf die Lösung der kinematischen Gleichungen gelegt.

2.2 Komplexes Potential

Auch in diesem Abschnitt wird die Annahmen stationärer, zweidimensionaler, reibungsfreier und inkompressibler Strömung gemacht. Somit kann das Strömungsfeld durch die kinematischen Gleichungen, die Kontinuitätsgleichung gemäß Gl. (2.1) und die Bedingung der Drehungsfreiheit nach Gl. (2.4), vollständig bestimmt werden.

Die Kontinuitätsgleichung kann durch Einführen der Stromfunktion, Gl. (1.33), erfüllt werden.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.9)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Diese Gleichungen werden in die Bedingung für die Drehungsfreiheit, Gl. (2.4), eingesetzt.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 = \nabla^2 \psi \quad (2.10)$$

Andererseits wird die Gleichung für die Drehungsfreiheit durch die Einführung eines Geschwindigkeitspotentials, Gl. (1.38), erfüllt.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Diese Gleichungen werden dann in die Kontinuitätsgleichung, Gl. (2.1), eingesetzt.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 = \nabla^2 \phi \quad (2.12)$$

Beide Gleichungen, Gl. (2.10) und Gl. (2.12), sind *Laplace-Gleichungen*.

Nun wird eine *komplexe Funktion* betrachtet.

$$w = f(z) = f(x + iy) \quad (2.13)$$

mit

$$z = x + iy \quad (2.14)$$

Erste und zweite partielle Ableitungen nach den unabhängigen Variablen x und y der komplexen Funktion, Gl. (2.13), sind:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot 1 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d^2 w}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 w}{dz^2} \cdot 1 \quad (2.16)$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot i \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 w}{dz^2} i \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d^2 w}{dz^2} \quad (2.18)$$

Wenn Gln. (2.16) und (2.18) addiert werden, ergibt sich wiederum eine Laplace–Gleichung.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 = \nabla^2 w \quad (2.19)$$

Damit diese Gleichung erfüllt ist, müssen sowohl der *Real-* als auch der *Imaginärteil* der komplexen Funktion $w(z)$, Gl. (2.13), diese Laplace–Gleichung, Gl. (2.19), erfüllen.

Wenn dann die folgende Annahme für die komplexe Funktion gemacht wird,

$$w = \phi + i \psi \quad (2.20)$$

müssen beide Bedingungen, $\nabla^2 \phi = 0$ und $\nabla^2 \psi = 0$, gültig sein, um die Laplace–Gleichung für $w(z)$, Gl. (2.19), zu erfüllen.

Weiterhin gilt nach Umschreiben über die Gln. (2.15) und (2.17):

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.21)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.22)$$

Vergleicht man die Real- und Imaginärteile, so erhält man:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v \quad (2.24)$$

Diese Gleichungen werden *Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen* genannt. Sie zeigen, daß die Real- und Imaginärteile der komplexen analytischen Funktion $w(z)$ als das *Ge-*

geschwindigkeitspotential ϕ und die *Stromfunktion* ψ für zweidimensionale, reibungsfreie, inkompressible und drehungsfreie Strömungen interpretiert werden können.

Gl. (2.20) wird das komplexe Potential genannt. Analytische Funktionen wie $z = x + i y$ können dazu benutzt werden, das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion zu beschreiben. Als zusätzliche Bedingung muß gelten, daß $w(z)$ endlich, zusammenhängend und eindeutig über das Gebiet sein muß, so daß $\partial^n w / \partial z^n$ für alle δz einen Grenzwert erreicht.

Weitere wichtige Beziehungen zwischen verwandten Koordinatensystemen, wie dem kartesischen Koordinatensystem und dem Polarkoordinatensystem dienen einer leichteren Lösungszugänglichkeit.

Solche Beziehungen entstehen über Gl. (2.21).

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \quad (2.25)$$

Mit Hilfe der Cauchy–Riemannschen Beziehungen, Gln. (2.23) und (2.24), entsteht auch:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - i v \quad (2.26)$$

Dasselbe läßt sich auch für das im Folgenden häufig verwendete Polarkoordinatensystem entwickeln.

Aus der Beziehung

$$\frac{\partial w}{\partial r} = e^{i\theta} \frac{dw}{dz} \quad (2.27)$$

mit

$$z = r e^{i\theta} \quad (2.28)$$

ergibt sich:

$$e^{i\theta} \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} = u_r - i u_\theta \quad (2.29)$$

Hierin sind die neuen unabhängigen Variablen r als die Radial- und θ als die Umfangskoordinate des Polarkoordinatensystems zu interpretieren. Die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten sind u_r und u_θ , die auf die Polarkoordinatenachsen abgebildet sind.

Daraus können die folgenden allgemeinen Bemerkungen getroffen werden:

- Jede zweidimensionale, reibungsfreie, inkompressible und drehungsfreie Strömung hat ein Geschwindigkeitspotential und eine Stromfunktion, die beide die Laplace–Gleichung erfüllen.
- Umgekehrt repräsentiert jede Lösung der Laplace–Gleichung das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion einer solchen Strömung.

Diese Beziehungen führen zu zwei Vorteilen:

- Viele Lösungen der Laplace–Gleichung sind bekannt.
- Da die Laplace–Gleichung eine lineare, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, wird die Summe partikulärer Lösungen auch zu einer Lösung der Gleichung.

Somit kann ein kompliziertes Strömungsfeld durch eine Summe von elementaren Strömungen zusammengesetzt werden. Die Anwendung der oben genannten Vorteile ist die Strategie zur Behandlung zweidimensionaler Potentialströmungen.

Der passende Lösungsablauf ergibt sich wie folgt:

- die Entwicklung von Lösungen für einige grundlegende Strömungen, die selbständig nicht notwendigerweise für praktische Strömungen sinnvoll erscheinen.
- die Superposition dieser grundlegenden Strömungen auf verschiedene Weisen, so daß das resultierende Strömungsfeld den praktischen Strömungen und der Summe der partikulären Lösungen entspricht:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n \\ \psi &= \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n\end{aligned}\tag{2.30}$$

- die Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten u und v unter Verwendung der Beziehungen für kartesische und für Polarkoordinatensysteme:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.31)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

oder

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (2.32)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

- die Berechnung des Druckes p über die Bernoulli–Gleichung:

$$p + \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) = \text{konstant} = p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2} V_\infty^2 \quad (2.33)$$

In diesem Abschnitt wurde die komplexe Funktion als Mittel eingeführt, Lösungen der Laplace–Gleichung für komplizierte Strömungen zu erzielen. Nun werden in diesem Sinn einige grundlegende, elementare Strömungsformen diskutiert.

2.3 Elementare Strömungen

2.3.1 Parallelströmung

In Bild 2.1 wird als erstes eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit V_∞ unter dem Anstellwinkel α dargestellt. Sie wird in einem kartesischen Koordinatensystem mit der Abszisse x als realer Koordinate und der Ordinate iy als der imaginären Koordinate gemessen. Darin ist i die imaginäre Zahl $i = \sqrt{-1}$.

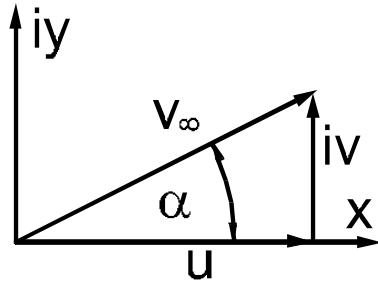


Bild 2.1 Parallelströmung

Somit wird im Bild 2.1 eine *komplexe Ebene* abgebildet. Das zu dieser Strömung gehörige *komplexe Potential* lautet:

$$w = V_{\infty} e^{-i\alpha} \cdot z \quad (2.34)$$

Nach der Ableitung von Gl. (2.34) nach dz wird daraus:

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} e^{-i\alpha} \quad (2.35)$$

Mit Gl. (2.26) ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= u - iv \\ &= V_{\infty} e^{-i\alpha} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$= V_{\infty} (\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

Indem man die Imaginär- und die Realteile innerhalb der Gl. (2.36) vergleicht, erhält man die Geschwindigkeitskomponenten u und v des Geschwindigkeitsvektors V_{∞}

$$\begin{aligned} u &= V_{\infty} \cos \alpha \\ v &= V_{\infty} \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.3.2 Quellen- und Senkenströmungen

Eine zweidimensionale Quellenströmung an der räumlichen Position z_0 wird in Bild 2.2 dargestellt. Die Quellenstärke, die den Volumenstrom dieser Quelle in einem Einheitsmaßstab angibt, wird mit σ beschrieben.

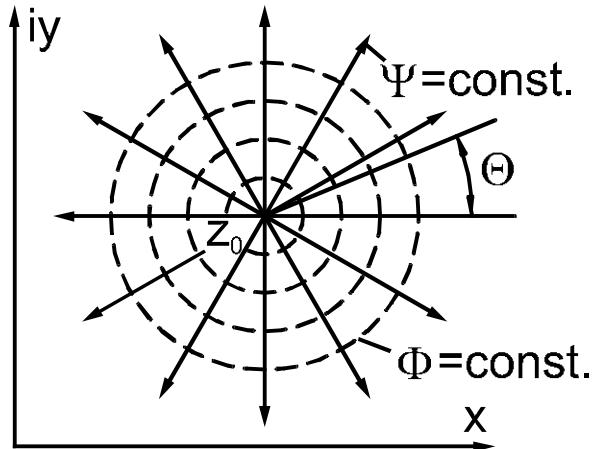


Bild 2.2 Quellenströmung

Für das komplexe Potential wird angenommen:

$$w = \frac{\sigma}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (2.38)$$

z_0 ist das Zentrum der Quelle und z ist ein beliebiger Punkt im Koordinatensystem. Folglich beschreibt die Differenz $(z - z_0)$ den Abstand zwischen dem Quellenzentrum und dem Aufpunkt z , an dem die induzierte Geschwindigkeit der Quelle angezeigt werden soll.

Nach der Ableitung von Gl. (2.38) nach dz wird daraus:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\sigma}{2\pi(z - z_0)} \quad (2.39)$$

Das komplexe Potential in Gl. (2.38) kann auch für das Polarkoordinatensystem umgeschrieben werden.

$$z - z_o = r e^{i\theta}$$

$$w = \frac{\sigma}{2\pi} (\ln r + i\theta) \quad (2.40)$$

$$= \phi + i\psi$$

Vergleicht man den Real- und den Imaginärteil, so erhält man für das Geschwindigkeitspotential ϕ und für die Stromfunktion ψ die Ausdrücke:

$$\phi = \frac{\sigma}{2\pi} \ln r \quad (2.41)$$

$$\psi = \frac{\sigma}{2\pi} \theta$$

Gemäß den Gleichungen, Gl. (2.32), ergeben sich aus den Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials ϕ und der Stromfunktion ψ nach den Raumkoordinaten r und θ die Geschwindigkeitskomponenten im Polarkoordinatensystem. In diesem Fall werden die Potentialfunktion und die Stromfunktion in Gl. (2.41) nach ∂r abgeleitet.

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\sigma}{2\pi r} \quad (2.42)$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

Hier ist die Umfangskomponente der Geschwindigkeit u_θ gleich null. Es entspricht den Vorstellungen zu einer Quellenströmung, die nur in radialer Richtung verlaufen kann.

Es ist zu beachten, daß die Geschwindigkeitskomponente u_r nach Bild 2.2 die radiale Komponente und die Geschwindigkeitskomponente u_θ die Umfangskomponente des Geschwindigkeitsvektors einer Quellenströmung bezeichnen.

Senkenströmungen sind lediglich negative Quellenströmungen. Beide Strömungen stellen elementare Strömungen dar, die auf Singularitäten basieren. Das bedeutet, daß sie die Kontinuitätsgleichung nicht am Ort z_0 erfüllen, zumal dort die Geschwindigkeit unendlich groß ist.

2.3.3 Dipolströmung

Nun wird eine Dipolströmung der Stärke μ an der räumlichen Stelle $z = z_0$ angenommen. Bild 2.3 beschreibt eine Dipolströmung aus einer Quellen- und einer Senkenströmung, die sich in einem Abstand l unter dem Winkel α zur x -Achse befinden.

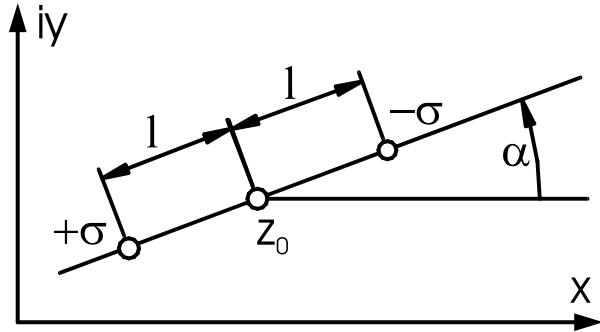


Bild 2.3 Darstellung der Lage einer Quelle und einer Senke zur Bildung eines Dipols

Die Dipolstärke wird durch den folgenden Ansatz definiert:

$$\mu = \sigma \cdot l = \text{konstant} \quad \text{für} \quad l \rightarrow 0 \quad (2.43)$$

Die Quelle sowie die Senke besitzen beide dieselbe Stärke σ , sie sind nur mit unterschiedlichem Vorzeichen versehen. Der Dipol ist, wie aus Gl. (2.43) zu entnehmen ist, eine weitere singuläre Strömung. Ihr komplexes Potential wird angenommen zu:

$$w = \frac{\mu e^{i\alpha}}{2\pi(z - z_0)} \quad (2.44)$$

Die Ableitung nach dz ergibt:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\mu e^{i\alpha}}{2\pi(z - z_0)^2} \quad (2.45)$$

Für $\alpha = 0$ und $z_0 = 0$ vereinfacht sich Gl. (2.44) zu:

$$w = \frac{\mu}{2\pi z} = \phi + i\psi \quad (2.46)$$

mit

$$z = r e^{i\theta} \quad (2.47)$$

Damit wird aus Gl. (2.46):

$$\begin{aligned} w &= \frac{\mu}{2\pi r} e^{-i\theta} \\ &= \frac{\mu}{2\pi r} [\cos \theta - i \sin \theta] \end{aligned} \tag{2.48}$$

Der Koeffizientenvergleich der Gln. (2.46) und (2.48) liefert das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mu}{2\pi r} \cos \theta \\ \psi &= -\frac{\mu}{2\pi r} \sin \theta \end{aligned} \tag{2.49}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten werden nach entsprechender Differentiation:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\mu}{2\pi r^2} \cos \theta \\ u_\theta &= \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\mu}{2\pi r^2} \sin \theta \end{aligned} \tag{2.50}$$

Für den Fall $\alpha = 0$ und $z_0 = 0$ werden die Strom- und Potentiallinien eines Dipols in Bild 2.4 beschrieben. Die darin gezeigten Equipotential- und Stromlinien sind Kreise, was beispielsweise aus Gl. (2.49) zu entnehmen ist, weil $\phi = \text{konstant} = \phi_l$ gilt.

$$r = \frac{\mu}{2\pi \phi_l} \cos \theta = D \cos \theta \tag{2.51}$$

D ist der Durchmesser des Kreises. Gl. (2.51) stellt eine Kreisfunktion dar.

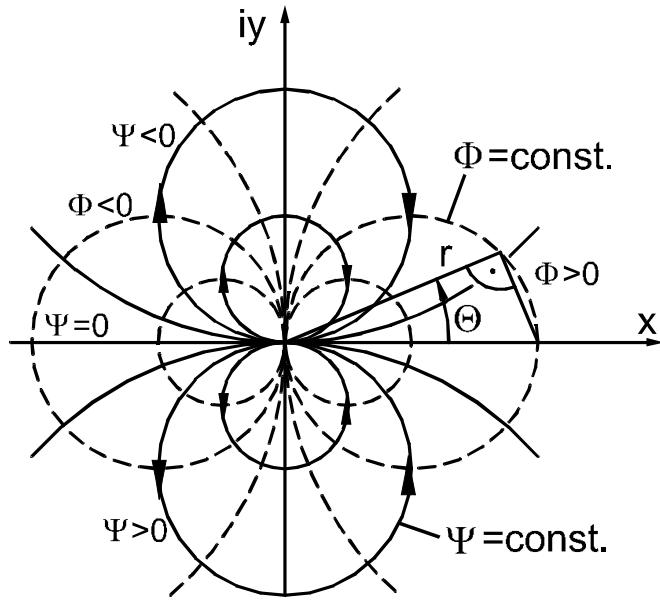


Bild 2.4 Strom- und Potentiallinien einer Dipolströmung für $\alpha = 0$ und $z_0 = 0$

Der allgemeine Fall für $\alpha \neq 0$ und $z_0 \neq 0$ kann ebenso leicht behandelt werden, wenn man in Gl. (2.44) lediglich setzt:

$$z - z_0 = r e^{i\theta} \quad (2.52)$$

2.3.4 Potentialwirbelströmung

Ein Potentialwirbel mit der Stärke Γ liege im Koordinatensystem an der Stelle $z = z_0$. Weiterhin sei seine positive Drehrichtung im Uhrzeigersinn definiert, Bild 2.5.

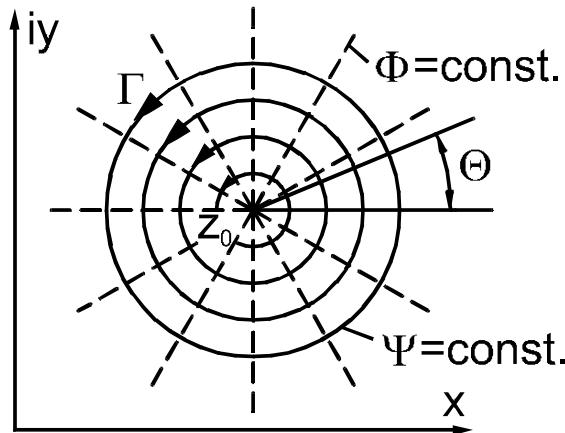


Bild 2.5 Potentialwirbelströmung

Das zugehörige komplexe Potential lautet:

$$w = \frac{i \Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (2.53)$$

Nach der Ableitung nach dz ergibt sich daraus:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{i \Gamma}{2\pi(z - z_0)} \quad (2.54)$$

Zur Vereinfachung liegt der Ursprung auf $z_0 = 0$. Es wird dieselbe Vorgehensweise wie in Abschnitt 2.3.2 für die Quellenströmung gewählt, das heißt, das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion des Potentialwirbels lauten:

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \Theta \\ (2.55) \end{aligned}$$

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Die Differentiation von Gl. (2.55) führt zu den Geschwindigkeitskomponenten im Polarkoordinatensystem.

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ (2.56) \end{aligned}$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Die Radialkomponente der Geschwindigkeit u_r existiert nicht, es gibt nur eine Umfangskomponente.

Für $z_0 \neq 0$ sollte wiederum Gl. (2.40) benutzt werden, es ergibt sich dasselbe Ergebnis wie Gl. (2.56), wenn man nur bedenkt, daß r nicht mehr vom Ursprung des Koordinatensystems aus zählt.

2.3.5 Wirbelschichtströmung

Die Wirbelstärke $\gamma(x)$ einer Wirbelschicht entlang der x -Achse von $x = x_1$ bis $x = x_2$ sei eine beliebige Funktion von x . Solch eine Wirbelschicht ist in Bild 2.6 wiedergegeben.

Hierin stehen die Elementarwirbel senkrecht zur Bildebene gemäß dem Potentialwirbel aus Bild 2.5. Die Zirkulation eines Elementes einer Wirbelschicht hat die Definition:

$$d\Gamma = \gamma(x) dx \quad (2.57)$$

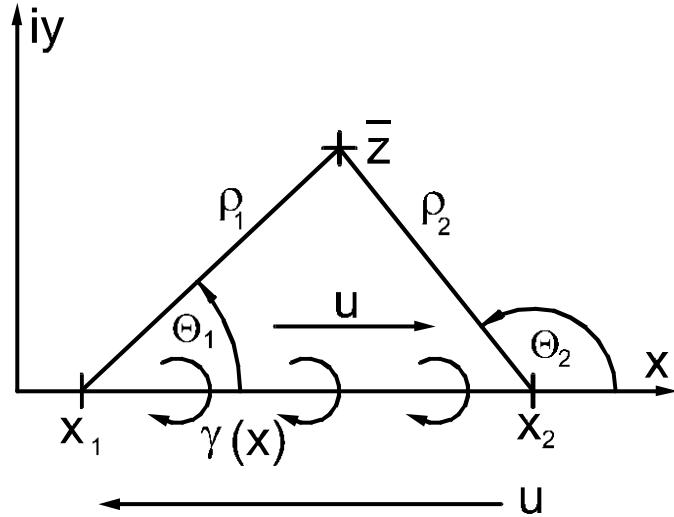


Bild 2.6 Wirbelschichtströmung

Das komplexe Potential ist daher das Integral über die Einzelbeiträge der Elemente $d\Gamma$, also wird mit Gl. (2.53), die das komplexe Potential für *einen* Potentialwirbel beschreibt:

$$w = \frac{i}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x) \ln(\bar{z} - x) dx \quad (2.58)$$

Die Ableitung dieses komplexen Potentials liefert folglich:

$$\frac{dw}{d\bar{z}} = \frac{i}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\gamma(x)}{(\bar{z} - x)} dx \quad (2.59)$$

Der Wert der Funktion \bar{z} beschreibt einen Punkt im Raum, der fest liegt und nicht von x abhängig ist.

Im speziellen Fall für $\gamma(x) = \text{konstant}$ reduziert sich die Gl. (2.59).

$$\frac{dw}{d\bar{z}} = \frac{i \gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\bar{z} - x)} = \frac{i \gamma}{2\pi} \ln \frac{(\bar{z} - x_1)}{(\bar{z} - x_2)} \quad (2.60)$$

Wenn man für die räumlichen Abstände das Folgende setzt:

$$\begin{aligned}\bar{z} - x_1 &= \rho_1 e^{i\theta_1} \\ \bar{z} - x_2 &= \rho_2 e^{i\theta_2}\end{aligned}\tag{2.61}$$

und diese in Gl. (2.60) einfügt, so findet man:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\bar{z}} &= \frac{i\gamma}{2\pi} \ln \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} \\ &= \frac{i\gamma}{2\pi} \left[\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \right] \\ &= \frac{\gamma}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) + \frac{i\gamma}{2\pi} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ &= u - i v\end{aligned}\tag{2.62}$$

Es zeigt sich, daß die Geschwindigkeitskomponenten für eine Wirbelschichtströmung in jedem Punkt z nach dem Koeffizientenvergleich des Real- und des Imaginärteils in den letzten beiden Zeilen von Gl. (2.62) sind:

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \tag{2.63}$$

$$v = \frac{\gamma}{2\pi} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Sehr nah an der Wirbelschicht wird aus der parallelen Geschwindigkeitskomponente u :

$$\text{für } i y \geq 0 \quad \theta_2 - \theta_1 \rightarrow \pi$$

$$\text{für } i y \leq 0 \quad \theta_2 - \theta_1 \rightarrow -\pi$$

$$u(i y \rightarrow \pm 0) = \pm \frac{\gamma}{2} \tag{2.64}$$

Aus Gl. (2.64) ist zu entnehmen, daß über die Wirbelschicht hinweg ein Sprung in der Geschwindigkeitskomponente u dergestalt entsteht, daß die Stärke der Wirbelschicht äquivalent der Geschwindigkeitsdiskontinuität über die Schicht hinweg $\Delta u = \gamma$ wird.

Links und rechts von der Wirbelschicht entlang der x -Achse für $i y = 0$ ergibt sich andererseits für die Geschwindigkeitskomponente u :

$$\left. \begin{array}{ll}
 \text{für} & x \geq x_2 \\
 \text{für} & x \leq x_1
 \end{array} \right\} \quad \theta_2 - \theta_1 \rightarrow 0$$

$u = 0$

(2.65)

Für die Normalgeschwindigkeitskomponente v ergibt sich in der Symmetrielinie bei $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ nach Gl. (2.63) der Wert $v = 0$.

2.4 Superpositionsprinzip

Wie bereits erwähnt wurde, ist die *Summe* partikulärer Lösungen der Laplace–Gleichung ebenso eine Lösung dieser Gleichung. Das liegt an der Tatsache, daß diese Differentialgleichung linear und zweiter Ordnung ist.

Aus dem vorhergehenden Abschnitt ist bekannt, daß die Lösungen für die Parallelströmung, für die Quellen- und Senkenströmung, für die Dipol-, für die Potential- und Wirbelschichtströmungen allesamt über das komplexe Potential w Lösungen der zugehörigen Laplace–Gleichung sind. Daraus ergibt sich, daß die Lösung für die Parallelströmung zu der Lösung der Quellen- oder Senkenströmung addiert, beziehungsweise *superponiert* werden kann. Dieses *Superpositionsprinzip* kann daher zu praktisch interessierenden Strömungen führen. Insbesondere sind das Strömungen in der Aerodynamik wie die Umströmung von Flugkörpern oder Tragflügelprofilen. In den nächsten Abschnitten wird das Superpositionsprinzip zu diesem Zweck angewendet und näher illustriert. Zunächst müssen erst die Randbedingungen in reibungsfreier Strömung um Körper mit festen Wänden näher diskutiert werden.

In Bild 2.7 erkennt man, daß die Oberfläche des Tragflügelprofils durch Stromlinien begrenzt werden. Entlang dieser Stromlinien verläuft der Geschwindigkeitsvektor parallel, also tangential. Weiterhin zeichnet die Stromlinien aus, daß sie sich nicht kreuzen können. Daraus folgt, daß keine Strömung in das Profil eindringen kann und folglich die Oberfläche wie gesagt einer Stromlinie entspricht.

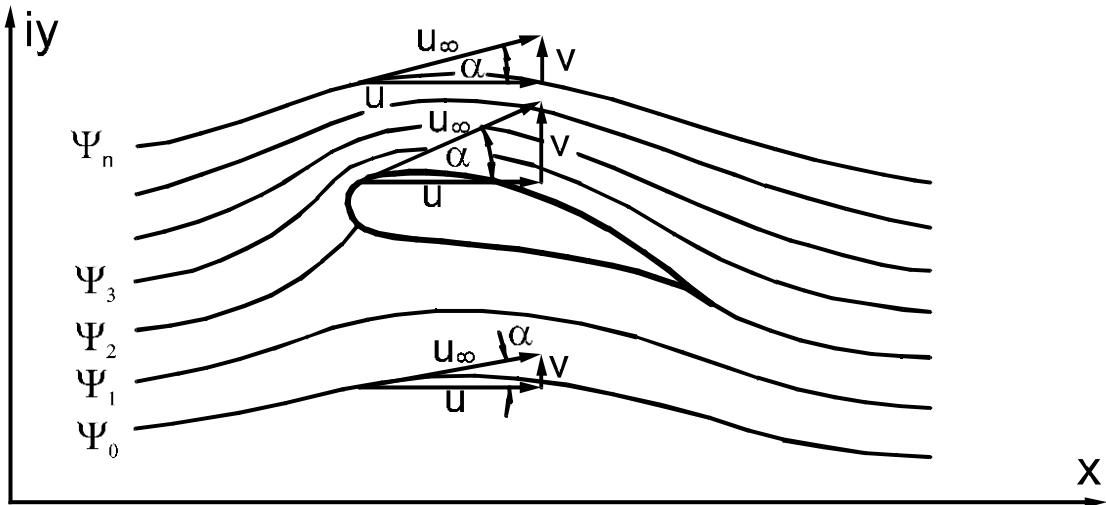


Bild 2.7 Stromlinien um ein Tragflügelprofil mit dem Anstellwinkel α

Die Gleichung für eine solche begrenzende Stromlinie an der Tragflügelberandung lautet gemäß Gln. (1.20) und (1.22):

$$\frac{v}{u} \Big|_{Wand} = \frac{dy}{dx} \Big|_{Wand} \quad (2.66)$$

$$\psi_{Wand} = \text{konst.}$$

Die Randbedingungen weit entfernt von dem Tragflügelprofil entsprechen den Bedingungen der unter dem Winkel α angestellten Parallelströmung.

$$u = u_\infty = V_\infty \cos \alpha \quad (2.67)$$

$$v = v_\infty = V_\infty \sin \alpha$$

Der Index ∞ bezeichnet die Zustände der Strömung im Unendlichen, genauer im Fernfeld des Profils.

Im Folgenden werden einige Beispiele des Superpositionsprinzips von elementaren singulären Strömungen im Detail beschrieben.

2.4.1 Quelle in einer Parallelströmung

Eine Quelle liegt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems und die Parallelströmung verläuft parallel zur x -Achse. Bild 2.8 zeigt diese Strömungskombination.

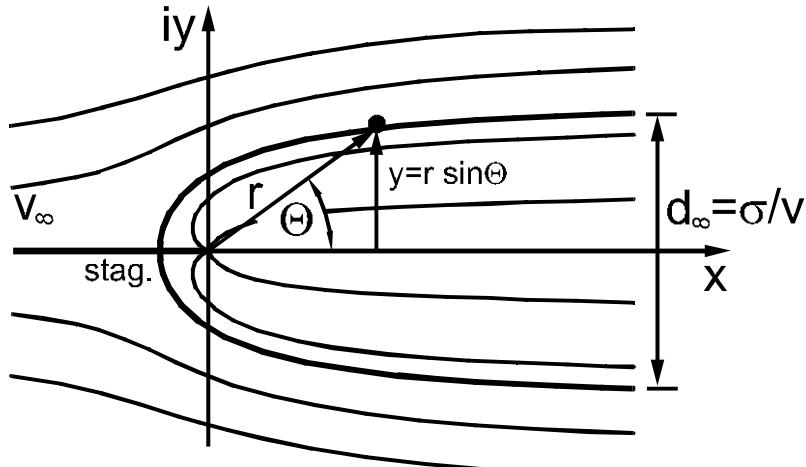


Bild 2.8 Quellenströmung in einer Parallelströmung

Das komplexe Potential w dieser Strömungen setzt sich nach dem Superpositionsprinzip aus den folgenden Anteilen zusammen:

$$w = V_{\infty} z + \frac{\sigma}{2\pi} \ln z \quad (2.68)$$

Die Ableitung nach dz wird:

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} + \frac{\sigma}{2\pi z} \quad (2.69)$$

Ausgehend von den Gl. (2.20) und (2.28) ergibt sich das Geschwindigkeitspotential ϕ und die Stromfunktion ψ zu:

$$\begin{aligned} \phi &= V_{\infty} x + \frac{\sigma}{2\pi} \ln r = V_{\infty} r \cos \theta + \frac{\sigma}{2\pi} \ln r \\ \psi &= V_{\infty} y + \frac{\sigma}{2\pi} \theta = V_{\infty} r \sin \theta + \frac{\sigma}{2\pi} \theta \end{aligned} \quad (2.70)$$

Nach den Ableitungsvorschriften, Gl. (2.32), erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = V_\infty \cos \theta + \frac{\sigma}{2\pi r} \quad (2.71)$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -V_\infty \sin \theta$$

Das Ergebnis ist in Bild 2.8 dargestellt. Es ist erkennbar, daß die Quellenströmung die Parallelströmung ablenkt. In dieser superponierten Strömung existiert ein Punkt auf der x -Achse, in dem die Geschwindigkeit null herrscht. An diesem Punkt, dem sogenannten *Staupunkt*, trennen sich die Stromlinien in eine obere und eine untere. Staupunkte sind die einzigen Punkte im Strömungsfeld an denen zwei Stromlinien gleichzeitig existieren können. Sie kommen entweder dort zusammen und bilden einen Staupunkt wie am hinteren Ende eines umströmten Körpers oder sie trennen sich am Auftreffpunkt der Strömung auf diesen Körper.

Die von dem vorderen Staupunkt ausgehenden Stromlinien in Bild 2.8 können auch als Körperkontur eines halbunendlichen, zweidimensionalen Körpers gewertet werden, da definitionsgemäß keine Strömung durch sie hindurchtreten darf. Insofern, was die Entwicklung der Strömung außerhalb der begrenzenden Stromlinien betrifft, kann das gesamte innenliegende Strömungsfeld durch einen festen Körper gleicher Kontur ersetzt werden. Dieser Körper ist also durch die Wandstromlinien gegeben. Nun kann bei gegebener Quellenstärke σ die Lage des vorderen Staupunktes berechnet werden, indem man Gl. (2.69) zu null setzt, denn die Geschwindigkeit muß im Staupunkt auch den Wert null annehmen.

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= V_\infty + \frac{\sigma}{2\pi z_{st}} \\ &= u - i v = 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

Hierin ist die Lage des Staupunktes z_{st} :

$$z_{st} = x_{st} + i y_{st} \quad (2.73)$$

Aus Symmetriebetrachtungen mit Hilfe von Bild 2.8 ergibt sich für die geometrischen Größen des Staupunktes:

$$y_{st} = 0$$

$$x_{st} \leq 0 \quad (2.74)$$

$$\theta_{st} = \pi$$

Aus Gl. (2.72) errechnet sich die Lage des Staupunktes bei:

$$x_{st} = -\frac{\sigma}{2\pi V_\infty} \quad (2.75)$$

$$y_{st} = 0$$

Der Wert der Stromfunktion im Staupunkt ist durch Gl. (2.70) mit $\theta_{st} = \pi$ gegeben.

$$\psi_{st} = \frac{\sigma}{2} \quad (2.76)$$

Da entlang einer Stromlinie $\psi = \text{konstant}$ gilt, kann man die Kontur durch Einsetzen von Gl. (2.76) in Gl. (2.70) errechnen. Zunächst ergibt sich:

$$\frac{\sigma}{2} = V_\infty y + \frac{\sigma}{2\pi} \theta \quad (2.77)$$

Aufgelöst nach der abhängigen Variablen y beschreibt Gl. (2.77) die Körperkontur des halbunendlichen Körpers.

$$y = r \sin \theta = \frac{\sigma}{2 V_\infty} \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right) \quad (2.78)$$

Das gilt für den Bereich $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Diese Kontur bildet einen halbunendlichen Körper ab, der sich in positiver x -Richtung bis ins Unendliche ausdehnt und dabei eine endliche Ausdehnung in y -Richtung oder Dicke d_∞ bei $\theta = 0$ besitzt.

$$d_\infty = 2 y_\infty = \frac{\sigma}{V_\infty} \quad (2.79)$$

Ein weiteres Beispiel dieser Art nach dem Superpositionsprinzip ist eine Quelle und eine Senke innerhalb einer Parallelströmung.

2.4.2 Quelle und Senke in einer Parallelströmung

Dieses Beispiel zum Superpositionsprinzip zeigt eine Quellen- und eine Senkenströmung gemeinsam eingebettet in einer Parallelströmung, die ohne Anstellwinkel in Richtung der x -Achse verläuft. Wie in Bild 2.9 dargestellt sind die Singularitäten symmetrisch um die y -Achse auf $x = 0$ angeordnet. Die Quelle mit der Stärke σ liegt bei $x = -b$ und die Senke gleicher Stärke σ bei $x = +b$.

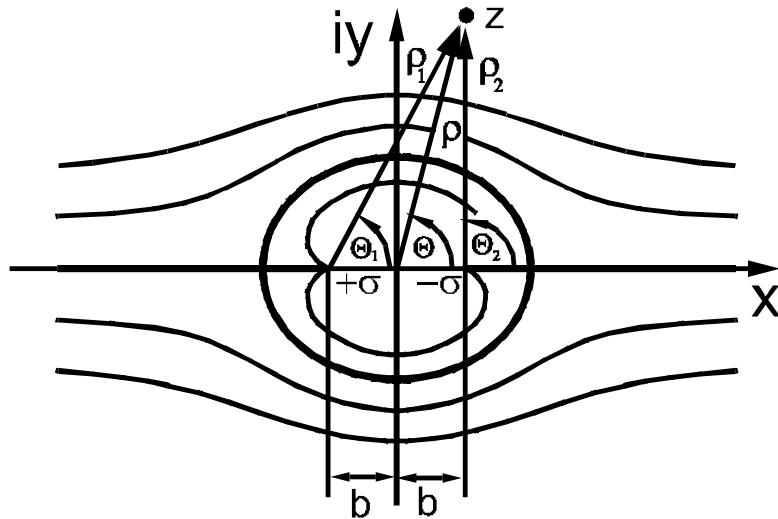


Bild 2.9 Quellen- und Senkenströmung in einer Parallelströmung

Mit Gl. (2.34) für das komplexe Potential einer Parallelströmung und mit Gl. (2.38) für das komplexe Potential einer Quelle bei $z_0 = -b$ und einer Senke bei $z_0 = +b$ mit negativ gleicher Stärke σ schreibt sich das zusammengesetzte komplexe Potential:

$$\begin{aligned} w &= V_\infty z + \frac{\sigma}{2\pi} [\ln(z+b) - \ln(z-b)] \\ &= V_\infty z + \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{(z+b)}{(z-b)} \end{aligned} \tag{2.80}$$

Die Ableitung des zusammengesetzten komplexen Potentials ergibt einen Schritt zu der Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten.

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= V_\infty + \frac{\sigma}{2\pi} \left(\frac{1}{z+b} - \frac{1}{z-b} \right) \\ &= V_\infty - \frac{\sigma}{\pi} \frac{b}{z^2 - b^2}\end{aligned}\tag{2.81}$$

Zur vereinfachten geometrischen Beschreibung werden einige Größen ersetzt.

$$\begin{aligned}z+b &= \rho_1 e^{i\theta_1} \\ z-b &= \rho_2 e^{i\theta_2} \\ z &= r e^{i\theta}\end{aligned}\tag{2.82}$$

Die zusammengesetzte Stromfunktion folgt aus Gl. (2.20) und speziell für die Singularitäten nach Gl. (2.41).

$$\begin{aligned}\psi &= V_\infty r \sin \theta + \frac{\sigma}{2\pi} \theta_1 - \frac{\sigma}{2\pi} \theta_2 \\ &= V_\infty r \sin \theta + \frac{\sigma}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}\tag{2.83}$$

Bild 2.9 zeigt, daß zwei Staupunkte auf der x -Achse für $y = 0$ liegen. Für diese gilt:

$$\theta_{st} = \theta_{1st} = \theta_{2st} = 0 \quad \text{oder} \quad \pi$$

Das bewirkt, daß Gl. (2.83) zu null wird und damit die geometrische Kontur der vorgestellten Strömung berechnet werden kann.

$$y = r \sin \theta = \frac{\sigma}{2\pi V_\infty} (\theta_2 - \theta_1)\tag{2.84}$$

Die geschlossene Kurve, die sich aus Gl. (2.84) beschreiben läßt, wird *Rankine–Oval* genannt, Bild 2.9.

Die Position der beiden Staupunkte berechnet man, indem man Gl. (2.81) zu null setzt, denn die Geschwindigkeit muß in beiden Punkten verschwinden.

$$\frac{dw}{dz} = 0 = V_\infty - \frac{\sigma}{\pi} \frac{b}{x_{st}^2 - b^2}\tag{2.85}$$

Diese Gleichung kann dann nach x hin aufgelöst werden.

$$x_{st} = \pm \sqrt{\frac{\sigma b}{\pi V_\infty} + b^2} \quad (2.86)$$

Das nächste Beispiel betrachtet einen Dipol in einer Parallelströmung.

2.4.3 Dipol in einer Parallelströmung

Die Definition eines Dipols wurde in Abschnitt 2.3.3 gegeben. Ein solcher Dipol mit der Stärke μ liege nun innerhalb einer zur x -Achse parallel verlaufenden Grundströmung nach Bild 2.10.

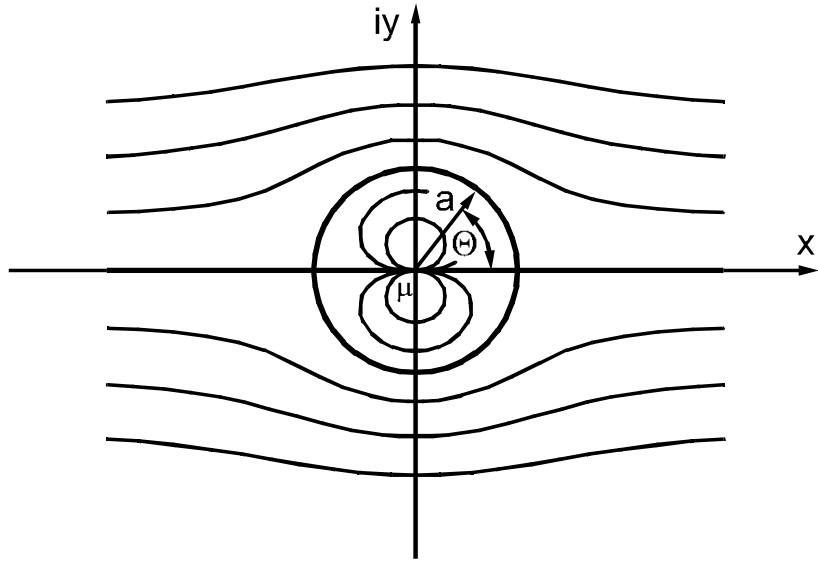


Bild 2.10 Dipolströmung in einer Parallelströmung

Diese Strömung wird durch Gln. (2.34) und (2.44) über deren komplexes Potential modelliert.

$$w = V_\infty z + \frac{\mu}{2\pi z} = V_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (2.87)$$

Hierin bedeutet.

$$a^2 = \frac{\mu}{2\pi V_\infty}$$

Mit der Abkürzung a und der Ableitung nach dz wird daraus:

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \quad (2.88)$$

Die Gültigkeit der vorgenannten Gleichung ist gewährt, wenn $\alpha = 0$ und der Ursprung des Dipols bei $z_0 = 0$ nach Gl. (2.44) liegt und die Grundströmung parallel zur x -Achse verläuft.

Setzt man Gl. (2.88) zu null, kann die Lage der beiden Staupunkte ermittelt werden.

$$z_{st} = \pm a \quad (2.89)$$

Das Geschwindigkeitspotential ϕ und die Stromfunktion ψ können entwickelt werden, wenn man Gl. (2.87) durch die folgende geometrische Größe ersetzt:

$$z = r e^{i\theta}$$

$$w = \phi + i \psi \quad (2.90)$$

$$= V_\infty \left[r (\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{a^2}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \right]$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} \phi &= V_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \\ \psi &= V_\infty \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.91)$$

Setzt man in Gl. (2.91) für $r = a$ wird der Wert der Stromfunktion gleich null, $\psi = 0$. Das formt eine geschlossene Kurve, nämlich einen Kreis, der nach Gl. (2.89) durch die Staupunkte verläuft.

Die Funktion der Stromlinie, die den Dipol von der umgebenden Strömung trennt, lautet dann:

$$z = a e^{i\theta} \quad (2.92)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten werden durch Anwendung der Gl. (2.32) berechenbar.

$$u_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$= V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$

(2.93)

$$u_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}$$

$$= -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

Für die Körperkontur, die bei $r = a$ liegt, folgt:

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = -2V_\infty \sin \theta$$

(2.94)

Das Ergebnis in Gl. (2.94) beschreibt eine Potentialströmung um einen Kreiszylinder mit dem Radius a in einer parallelen Grundströmung. Damit ist ein wohlbekanntes Ergebnis geliefert, das oft als äußere Randbedingung für Grenzschichtberechnungen – also reibungsbehaftete Strömungsberechnungen an Kreiszylindern – dient.

Ein identisches Ergebnis für die radiale Geschwindigkeitskomponente u_r und die tangentialen u_θ kann natürlich auch über die Gl. (2.29) erzielt werden.

$$e^{i\theta} \frac{dw}{dz} = u_r - i u_\theta$$

$$= V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\theta} \right) e^{i\theta}$$

(2.95)

Ebenso lässt sich das Ergebnis gewinnen, indem man direkt die Geschwindigkeitsfelder für die Parallelströmung, Gl. (2.36), und für die Dipolströmung, Gl. (2.50), kombiniert.

Schließt die freie Anströmung und die x -Achse einen Winkel α ein, dann wird das komplexe Potential dieser zusammengesetzten Strömung:

$$\begin{aligned}
 w &= V_\infty \left(z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z e^{-i\alpha}} \right) \\
 &= V_\infty \left(r e^{i(\theta-\alpha)} + \frac{a^2}{r} e^{-i(\theta-\alpha)} \right)
 \end{aligned} \tag{2.96}$$

Das Ergebnis dieser Strömung ist in Bild 2.11 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß das gesamte Feld lediglich um den Anstellwinkel α gedreht ist und daß der Winkel θ durch $(\theta - \alpha)$ zu ersetzen ist.

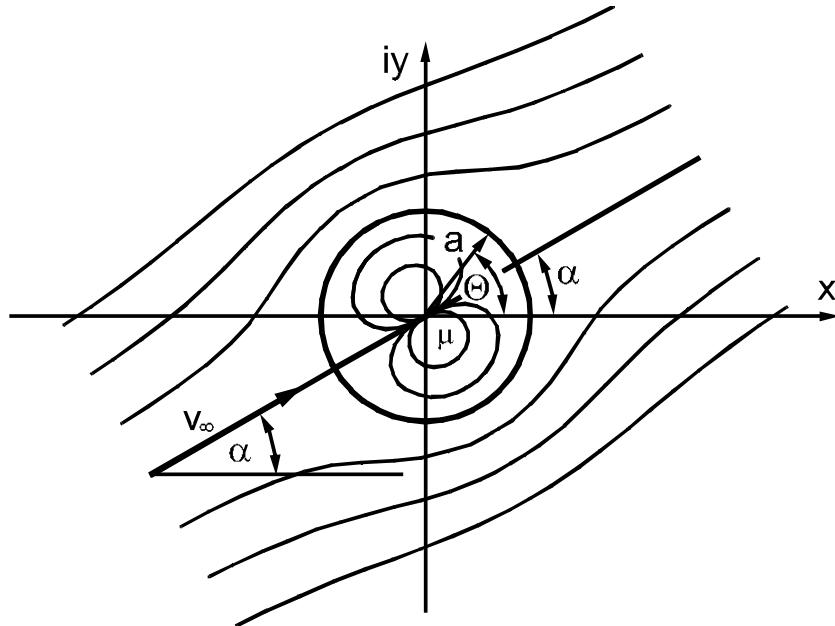


Bild 2.11 Dipolströmung in einer um den Winkel α angestellten Parallelströmung

2.4.4 Dipol und Potentialwirbel in einer Parallelströmung

In Bild 2.12 ist ein Dipol der Stärke μ und ein Potentialwirbel der Stärke Γ im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems eingebettet in eine der x -Achse parallel laufenden Grundströmung zu finden.

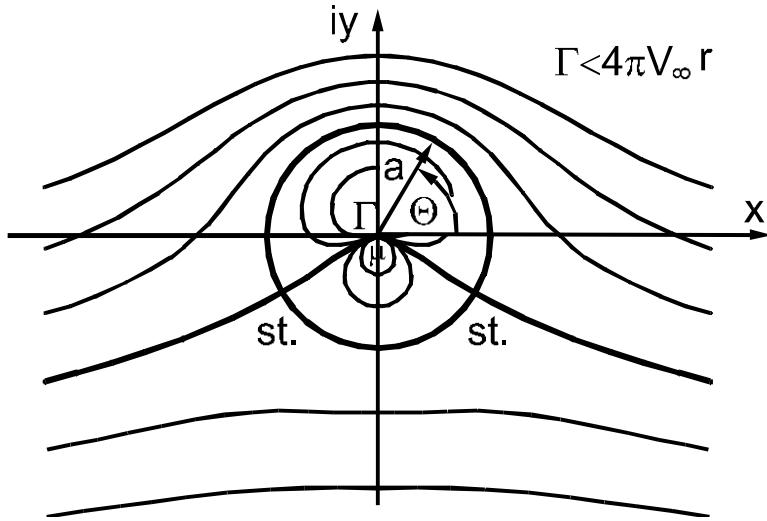


Bild 2.12 Dipol- und Potentialwirbelströmung in einer Parallelströmung mit $\Gamma = 4 \pi V_\infty r$

Das komplexe Potential dieser Kombination besteht aus Gl. (2.53) für den Potentialwirbel und aus Gl. (2.87) für den Dipol in einer Parallelströmung.

$$w = V_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i \Gamma}{2\pi} \ln z \quad (2.97)$$

Nach Ableitung wird daraus:

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i \Gamma}{2\pi z} \quad (2.98)$$

Der Kreis $z = a e^{i\theta}$ mit dem Radius $a^2 = \mu / (2\pi V_\infty)$ beschreibt wiederum eine Stromlinie, da für den reinen Potentialwirbel die Stromlinien auch Kreise waren.

Die Addition beider Teile der Stromfunktionen aus Gl. (2.55) für die reine Potentialwirbelströmung und aus Gl. (2.91) für die Dipolströmung kombiniert mit der Parallelströmung führt auf die neue Stromfunktion.

$$\psi = V_\infty \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (2.99)$$

Auf dem Kreis, der die Zylinderoberfläche beschreibt, wird der Wert der Stromfunktion, Gl. (2.99):

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (2.100)$$

Wie bereits früher beschrieben, können die Geschwindigkeitskomponenten aus der Stromfunktion ermittelt werden.

$$\begin{aligned} u_r - i u_\theta &= e^{i\theta} \frac{dw}{dz} \\ &= V_\infty \left(e^{i\theta} - \frac{a^2}{r^2} e^{-i\theta} \right) + \frac{i \Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Durch den Koeffizientenvergleich von Real- und Imaginärteil folgt für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned} u_r &= V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ u_\theta &= -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Für den Kreis mit dem Radius $r = a$, der die Oberfläche des Kreiszylinders umschreibt, gilt:

$$\begin{aligned} u_r &= 0 \\ u_\theta &= -2 V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Wenn in der letzten Gleichung u_θ zu null gesetzt wird, so muß die Lage der beiden Staupunkte ermittelbar sein.

$$\sin \theta_{st} = -\frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty} \quad (2.104)$$

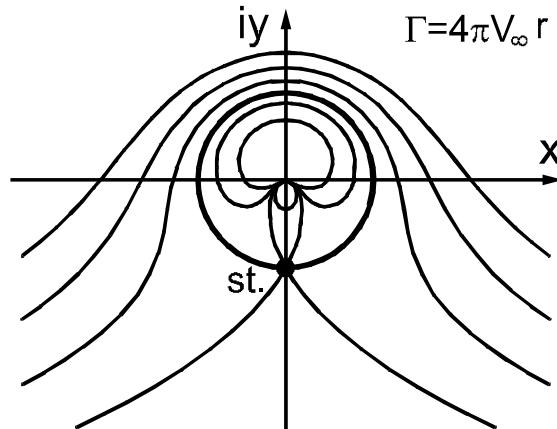
Da dieser Ausdruck negativ ist, werden sich die Staupunkte im dritten und vierten Quadranten des Koordinatensystems befinden. Das gilt nur unter der Voraussetzung, daß der Wert kleiner als eins ist. In diesem Fall wird eine Strömung um einen Körper mit Auftrieb für den Wert der Zirkulation $\Gamma < 4\pi V_\infty r$ beschrieben. Ist er direkt eins, so fallen die beiden Staupunkte an der Stelle $\theta = -\pi/2$ aufeinander, Bild 2.13.

Wenn der Wert von Gl. (2.104) dagegen größer als eins wird, entfällt das Ergebnis für eine physikalische Bedeutung, Bild 2.14. In diesem Fall muß Gl. (2.102) für $u_\theta = 0$ gedeutet werden. Zudem muß daran erinnert werden, daß nunmehr $r \neq a$ ist und die Staupunkte demzufolge innerhalb oder außerhalb des Kreises an der Stelle $\theta = -\pi/2$ liegen.

$$\frac{r}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi a V_\infty}{\Gamma} \right)^2} \right] \quad (2.105)$$

Die Lage eines Staupunktes innerhalb des Kreiszylinders ist vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet, wie bereits gesagt, ohne Bedeutung, da es sich normalerweise um einen festen Körper handelt. Dennoch würde dieser Fall für die Kombination von Dipol-, Potentialwirbel- und Parallelströmungen eine Strömung innerhalb des Kreises mit dem Radius $r = a$ bedeuten.

Bild 2.13 bietet einen Einblick in die Lage der Staupunkte für eine Strömung um einen Körper mit Auftrieb für den Wert der Zirkulation $\Gamma = 4\pi V_\infty r$.



*Bild 2.13 Dipol- und Potentialwirbelströmung in einer Parallelströmung
mit $\Gamma = 4\pi V_\infty r$*

Bild 2.14 zeigt die gleiche Strömung mit der Lage der Staupunkte für eine Strömung um einen Körper mit Auftrieb für den Wert der Zirkulation $\Gamma > 4\pi V_\infty r$.

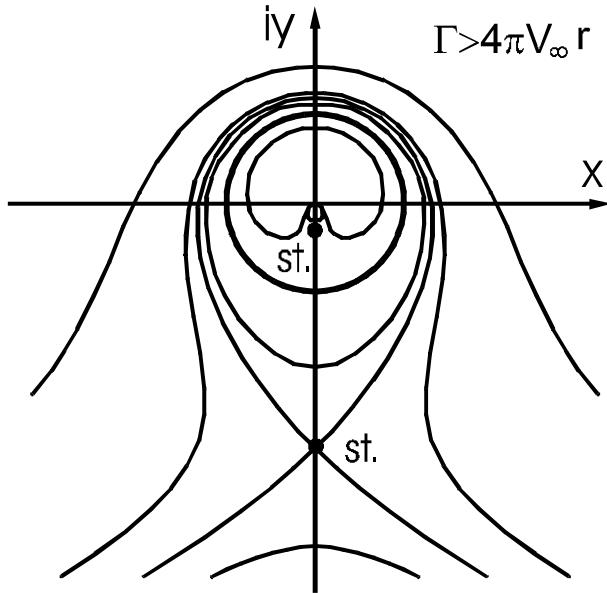


Bild 2.14 Dipol- und Potentialwirbelströmung in einer Parallelströmung mit $\Gamma > 4 \pi V_\infty r$

Die Symmetrie der Stromlinien um den zylindrischen Körper, insbesondere um die y -Achse, legt den Schluß nah, daß eine Normalkraft, nämlich Auftrieb, auf den Körper wirkt. Der Widerstand hingegen ist null bei der hier angesetzten Potentialströmung, die laut Definition reibungsfrei ist. Diese Tatsache wird *d'Alembert–Paradoxon* genannt. Das läßt sich daher erklären, daß bei reibungsfreier Strömung keine Schubspannungen auftreten, die einen Nachlauf nach dem Kreiszylinder bewirken könnten. Daher ist das Druckfeld, das aus den Geschwindigkeitskomponenten über die *Bernoulli–Gleichung* zu berechnen ist, vor und nach dem Körper in Strömungsrichtung symmetrisch. Eine Widerstandskraft aus den Reibungskräften und dem Druckfeld ist nicht vorhanden.

Quantitativ können diese Angaben durch die Berechnung des Widerstandes und des Auftriebes formal nachgewiesen werden.

Der Druckbeiwert ist folgendermaßen definiert:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \quad (2.106)$$

Darin ist $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$ der *dynamische Druck*. Die Bernoulli–Gleichung kann dazu benutzt werden, den Druck durch die Geschwindigkeitskomponenten zu ersetzen.

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = p + \frac{1}{2} \rho_\infty u_\theta^2 \quad (2.107)$$

Für inkompressible Strömungen liefert das:

$$c_p = 1 - \left(\frac{u_\theta}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.108)$$

Mit Gl. (2.103) wird daraus:

$$c_p = 1 - \left[4 \sin^2 \theta + \frac{2 \Gamma \sin \theta}{\pi a V_\infty} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi a V_\infty} \right)^2 \right] \quad (2.109)$$

Der Widerstandsbeiwert c_w , hervorgerufen durch Druckunterschiede, kann mit der folgenden Formel berechnet werden.

$$c_w = \frac{1}{c} \int_{LE}^{TE} (c_{p,o} - c_{p,u}) dy \quad (2.110)$$

$$c_w = \frac{1}{c} \int_{LE}^{TE} c_{p,o} dy - \frac{1}{c} \int_{LE}^{TE} c_{p,u} dy$$

Die Integralgrenzen werden mit den Abkürzungen *LE* und *TE* bezeichnet. *LE* steht für *leading edge*, also der Vorderkante des Profils, und *TE* für *trailing edge* für Profilhinterkante. Die geometrische Größe c beschreibt die Profilsehne oder *cord length*, nämlich die Strecke, die als kürzeste Verbindung durch die Vorder- und Hinterkante des Profils verläuft. Diese Linie stellt eine charakteristische Profilgröße dar. Die Indizes u und o bezeichnen die untere und die obere Seite des Tragflügelprofils. Die geometrischen Definitionen am Tragflügelprofil sind in Bild 4.1 nachzuvollziehen.

In Polarkoordinaten kann die Länge y auch durch $y = R \sin \theta$ und $dy = R \cos \theta d\theta$ ersetzt werden, wenn man berücksichtigt, daß gilt $c = 2R$. Damit ergibt sich:

$$c_w = \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 c_{p,o} \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} c_{p,u} \cos \theta d\theta$$

$$c_w = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} c_p \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} c_p \cos \theta d\theta \quad (2.111)$$

$$c_w = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} c_p \cos \theta d\theta$$

Substituiert man Gl. (2.109) in Gl. (2.111), so ergeben sich einige Integrale über trigonometrische Funktionen, die folgende Ergebnisse besitzen:

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0 \quad (2.112)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

Diese Ergebnisse bestätigen das sogenannte *d'Alembert Paradoxon*, da der durch Gl. (2.111) berechenbare Widerstand null wird.

$$c_w = 0 \quad (2.113)$$

Auf ähnliche Weise kann der Auftrieb errechnet werden. Die Formulierung dazu lautet:

$$c_a = \frac{1}{c} \int_0^c c_{p,u} dx - \frac{1}{c} \int_0^c c_{p,o} dx \quad (2.114)$$

Wiederum wird diese Gleichung in ein Polarkoordinatensystem überführt. Dabei gilt $x = R \cos \theta$ und $dx = -R \sin \theta d\theta$. Aus Gl. (2.114) wird daher:

$$\begin{aligned} c_a &= -\frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} c_{p,u} \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 c_{p,o} \sin \theta d\theta \\ c_a &= -\frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} c_{p,l} \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.115)$$

Wiederum ergeben sich Integrale über trigonometrische Funktionen, wenn man Gl. (2.109) in Gl. (2.115) einsetzt.

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0 \quad (2.116)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$$

Das Resultat von Gl. (2.115) liefert für den Auftriebsbeiwert:

$$c_a = \frac{\Gamma}{R V_\infty} \quad (2.117)$$

Aus der Definition für den Auftriebsbeiwert c_a kann man die Auftriebskraft A ermitteln.

$$\begin{aligned} A &= q_\infty S c_a \\ &= 1/2 \rho_\infty V_\infty^2 S c_a \end{aligned} \quad (2.118)$$

Hier stellt S die Tragflügelfläche bezogen auf die Einheitsspannweite $S = 2 a$ dar. Die Kombination der beiden Gln. (2.117) und (2.118) resultiert in dem einfachen Ergebnis dieser Studie, was gleichfalls *Kutta–Joukowski–Theorem* genannt wird.

$$A = \rho_\infty V_\infty \Gamma \quad (2.119)$$

Dieses Theorem besagt, daß der Auftrieb A pro Einheitsspannweitenrichtung direkt proportional der Zirkulation Γ um einen Kreiszylinder in einer Parallelströmung ist, zu welcher die Auftriebskraft senkrecht steht.

Eine derartige Strömung kann durch Drehen eines Zylinders in einer Strömung erzeugt werden. Damit entsteht eine Auftriebskraft, die auch *Magnuskraft* heißt. Das Strömungsfeld entspricht dem berechneten aus Gl. (2.97).

Es ist offensichtlich, daß das gesamte Strömungsfeld auch um einen Anstellwinkel α gegenüber dem kartesischen Koordinatensystem gedreht sein kann, wie es gleichfalls bei der Dipolströmung in einer Parallelströmung nach Gl. (2.96) der Fall war.

$$w = V_\infty \left[z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right] + \frac{i \Gamma}{2\pi} \ln z \quad (2.120)$$

mit $z = e^{i\theta}$ ergibt sich daraus:

$$w = V_\infty \left[r e^{i(\theta-\alpha)} + \frac{a^2}{r} e^{-i(\theta-\alpha)} \right] + \frac{i \Gamma}{2\pi} [\ln r + i \theta] \quad (2.121)$$

Das beschließt das Kapitel über stationäre, zweidimensionale Potentialströmungen. Zunächst wurde durch die Kontinuitätsgleichung und die zweidimensionalen Eulergleichungen, die für inkompressible Strömungen angesetzt wurden, die Bernoulli–Gleichung zur Berechnung des Druckes hergeleitet.

Die beiden kinematischen Gleichungen, die lediglich aus der Kontinuitätsgleichung und der Bedingung für die Drehungsfreiheit bestanden, dienten daraufhin der Erstellung eines

komplexen Potentials, das diese kinematischen Gleichungen wechselweise über das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion erfüllte.

Der entscheidende Vorteil des komplexen Potentials ist, daß es die Laplace–Gleichung erfüllt und daher die Summe von partikulären Lösungen auch eine Lösung dieser Gleichung darstellt. Das erlaubt die Superposition verschiedenster partikulärer Lösungen zu einer neuen.

Daher konnten einige Lösungen von singulären Strömungsformen gefunden werden, deren Zusammensetzung zu praktischen Strömungsformen in der Aerodynamik führen. Dazu gehören die Parallelströmung, die Quellen- und Senkenströmung, die Dipol- und die Potentialwirbelströmung sowie die Strömung um eine Wirbelschicht.

Aus der Berechnung der so entstandenen Geschwindigkeitskomponenten kann nunmehr das Druckfeld über die Bernoulli–Gleichung erstellt werden.

Das Druckfeld führt dann zur Bestimmung der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte, also zu den Auftriebs- und Widerstandskräften und zu den daraus resultierenden Momenten. Diese stellen ein entscheidendes Ergebnis der Aerodynamik dar, zumal diese Daten in die Berechnung der Flugmechanik eingehen.

3 Konforme Abbildungen

3.1 Eigenschaften der Transformation

Bis hierher wurden einige einfache Potentialströmungen und das Superpositionsprinzip dieser Strömungen dazu diskutiert. Erinnert sei an den Dipol in einer Parallelströmung, was eine Strömung um einen feststehenden Zylinder herum beschreibt. Addiert man zu diesem Strömungsfeld einen Potentialwirbel, so erfährt der Zylinder eine zur Parallelströmung senkrecht gerichtete Kraft, nämlich die Auftriebskraft. Die Strömung um wesentlich kompliziertere reale Körper waren bisher nicht beschreibbar. Es existieren aber Methoden, die eine zusammengesetzte Potentialströmung von dem ursprünglichen in ein anderes Koordinatensystem transformieren. So kann beispielsweise durch geometrische Transformation aus einem Kreiszylinder ein elliptischer Zylinder oder sogar ein Tragflügelprofil entstehen. Diese Transformationstechnik wird *Konforme Abbildung* genannt. Die Natur dieser Transformation wird in Bild 3.1 in ihrer geometrischen Bedeutung interpretierbar.

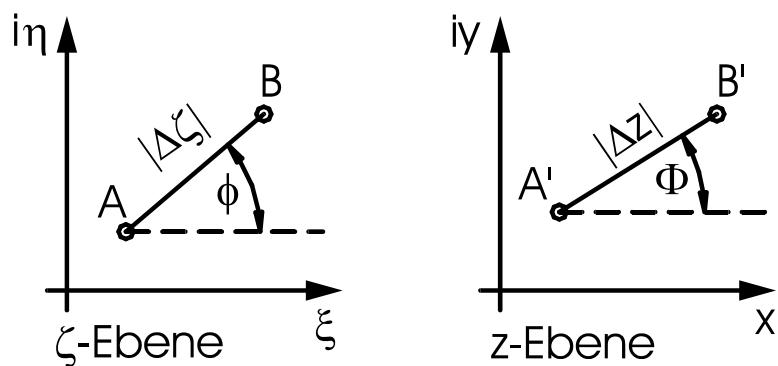


Bild 3.1 Koordinatensystemvergleich bei der konformen Abbildung

Die Verbindung zwischen beiden komplexen Koordinatenflächen ist, daß sie jeweils eine Funktion der anderen sind.

$$z = f(\zeta) \quad (3.1)$$

Die ζ -Ebene wird so auf die z -Ebene abgebildet, daß eine Linie \overline{AB} in der ζ -Ebene eine Linie $\overline{A'B'}$ in der z -Ebene wird. Wenn $z = f(\zeta)$ eine kontinuierliche analytische Funktion ist, gilt für $\Delta\zeta \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta\zeta} = \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_A \quad (3.2)$$

oder nach Ausführung des Grenzüberganges

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_A \Delta\zeta \quad (3.3)$$

$$\Delta\zeta \rightarrow 0$$

Die infinitesimal kleinen Längen $\Delta\zeta$ und Δz können in exponentieller Form geschrieben werden.

$$\Delta\zeta = |\Delta\zeta| e^{i\varphi} \quad (3.4)$$

$$\Delta z = |\Delta z| e^{i\theta} \quad (3.5)$$

Nun wird angesetzt, daß die Steigung einer Kurve in Punkt A der folgenden Gleichung entspräche:

$$\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_A = c e^{i\alpha} \quad (3.6)$$

Hierin können die Größen c und α in der ζ -Ebene variabel sein. Damit sind einige Schlüsse zu ziehen, wenn für Δz aus der Kombination von Gl. (3.3) mit Gl. (3.5) zusammen mit Gl. (3.6) wird:

$$\begin{aligned}\Delta z &= |\Delta z| e^{i\theta} = \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_A \Delta \zeta \\ &= c e^{i\alpha} |\Delta \zeta| e^{i\varphi} \\ &= c |\Delta \zeta| e^{i(\alpha + \varphi)}\end{aligned}\tag{3.7}$$

Vergleicht man den zweiten mit dem letzten Teil von Gl. (3.7), insbesondere was die Absolutbeträge anbelangt, so erklärt sich, daß nach Gl. (3.6) der Koeffizient c der absolute Betrag von $(\partial z / \partial \zeta)_A$ ist.

$$\begin{aligned}|\Delta z| &= c |\Delta \zeta| \\ &= \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_A |\Delta \zeta|\end{aligned}\tag{3.8}$$

Weiterhin können die Winkel in Gl. (3.7) als die Argumente der komplexen Funktionen verstanden werden.

$$\begin{aligned}\theta &= \arg(\Delta z) = \alpha + \varphi \\ &= \arg\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_A + \arg(\Delta \zeta)\end{aligned}\tag{3.9}$$

Die Schlußfolgerung aus Gl. (3.8) ist, daß alle Linien $\Delta \zeta$ durch den Punkt A mit dem Faktor $c = |\partial z / \partial \zeta|_A$ gestreckt werden, und daß diese Linien wegen Gl. (3.9) um denselben Winkel $\alpha = \arg(\partial z / \partial \zeta)_A$ gedreht werden. Daraus folgt, daß der Winkel zwischen zwei Linien durch den Punkt A' in der z -Ebene derselbe ist wie in der ζ -Ebene zwischen den korrespondierenden Linien in Punkt A . In anderen Worten wird ein orthogonales Gitternetz um einen Körper herum in der ζ -Ebene ebenfalls in der z -Ebene orthogonal bleiben, nur die Kontur des Körpers wird sich verändern.

Elemente einer Umgebung um den Punkt A werden in ähnliche in der Umgebung des Punktes A' transformiert. Das gilt für alle Punkte der Ebene bis auf singuläre Punkte der Transformation wie beispielsweise:

$$\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_A = 0 \quad \text{oder} \quad = \infty\tag{3.10}$$

Komplexe Potentiale der Strömung in den zwei Ebenen stehen in folgender Beziehung:

$$w(z) = w[f(\zeta)] \quad (3.11)$$

Das Geschwindigkeitsfeld, das nach Differentiation der Gl. (3.11) nach z berechenbar wird, kann über die Bedingung gefunden werden:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{dw/d\zeta}{dz/d\zeta} \quad (3.12)$$

Die Transformationsvorschriften, die sich für Umformungen der komplexen Potentiale eignen, werden in dem nächsten Abschnitt vorgestellt.

3.2 Elementare Transformationsvorschriften

Zur Transformation einer Parallelströmung bietet sich eine Umformung an, die einen Anstellwinkel in der transformierten Ebene einschließt. Eine Transformation, die auf einer quadratischen Funktion aufbaut, verändert Linien in der Transformationsebene in Parabeln. Die *Joukowski*-Transformation bildet Kreise in Ellipsen ab. Ein anderes Beispiel liefert den Beweis, daß eine Kreiszylinderumströmung in eine Umströmung einer angestellten Platte transformiert werden kann. Damit zeigt sich bereits, daß die Umströmung von Tragflügelprofilen auf diese Weise auch erzielbar sein wird.

3.2.1 Transformation von Parallelströmungen

Das komplexe Potential einer Parallelströmung in der ζ -Ebene nach Abschnitt 2.3.1, die tangential zur ζ -Achse verläuft, folgt der Formulierung:

$$w = V_\infty \zeta \quad (3.13)$$

Bild 3.2 definiert eine solche Transformation.

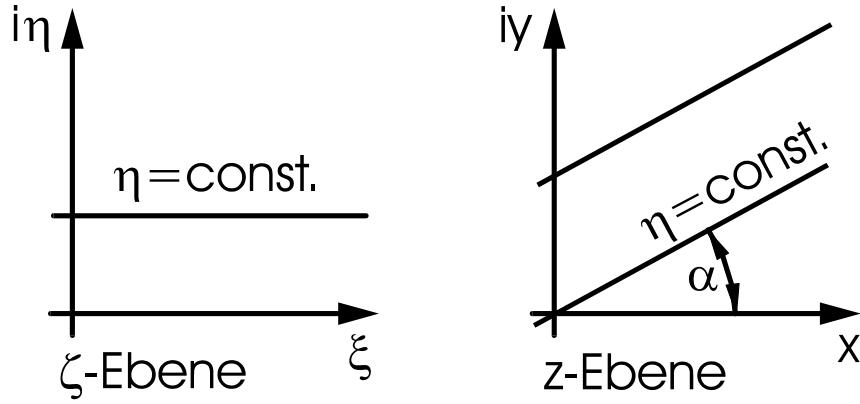


Bild 3.2 Transformation für eine Parallelströmung

Die Transformationsvorschrift für eine Rotation der Parallelströmung in der z -Ebene um den Winkel α ist:

$$z = \zeta e^{i\alpha} \quad (3.14)$$

Eine Umschreibung des komplexen Potentials kann erreicht werden, indem man Gl. (3.14) in Gl. (3.13) einsetzt.

$$\begin{aligned} w(z) &= V_\infty \zeta = V_\infty e^{-i\alpha} z \\ &= V_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + i V_\infty (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Diese Gleichung zeigt dieselben Ergebnisse, wie sie bereits in Abschnitt 2.3.1 vorgelegt wurden. Der einzige Unterschied ist allerdings, daß die Parallelströmung in derselben Ebene nicht um den Winkel α gedreht ist, aber in der z -Ebene, siehe Bild 3.2.

Nun wird die Transformationsvorschrift, Gl. (3.14), auf Singularitäten hin überprüft.

$$\frac{dz}{d\zeta} = e^{i\alpha} = \text{konstant} \neq 0 \quad (3.16)$$

Nach Gl. (3.16) liegt kein unbestimmter Wert vor, also bildet diese Transformation keine singulären Punkte.

3.2.2 Quadratische Transformation

Eine quadratische Form kann die Form haben:

$$z = \zeta^2 \quad (3.17)$$

Bild 3.3 zeigt, daß die obere Linie \overline{CE} in der ζ -Ebene durch die quadratische Transformation in 4 Quadranten der z -Ebene abgebildet wird. Die Strecke \overline{BA} liegt in der z -Ebene genau auf der x -Achse.

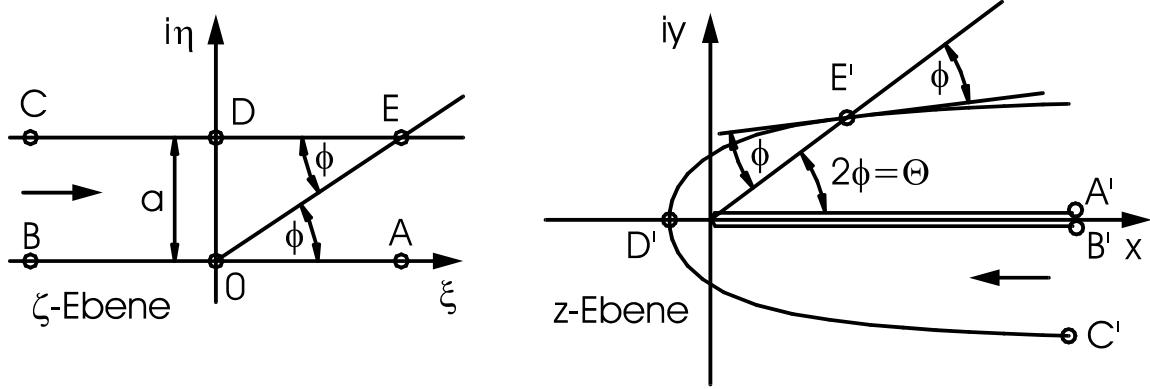


Bild 3.3 *Quadratische Transformation*

Alle Kurven im negativen Bereich der iy -Achse in der ζ -Ebene würden sich auf identische Kurven in der z -Ebene in Form einer zweiten Schicht überlagern.

Diese Transformation hat eine Singularität bei $\zeta = 0$, denn es gilt:

$$\frac{dz}{d\zeta} = 2\zeta = 0 \quad (3.18)$$

Die Eigenschaft der Erhaltung der Winkel an diesem Punkt ist nicht gewährleistet. Aus diesem Grund können die folgenden Betrachtungen diesen singulären Punkt betreffend gemacht werden.

Wenn für ζ die Beschreibung gewählt wird:

$$\zeta = \rho e^{i\varphi} \quad (3.19)$$

dann gilt für z über die Transformation aus Gl. (3.17):

$$z = r e^{i\theta} = \rho^2 e^{i2\varphi} \quad (3.20)$$

Der Vergleich der Absolutwerte und der Winkel erstellt folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} r &= \rho^2 \\ \theta &= 2\varphi \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dieses Ergebnis gilt für den Ursprung des Koordinatensystems, wo die Singularität vorliegt. Alle anderen Punkte außerhalb des Ursprungs genügen der Bedingung konstanter Winkel in den beiden Ebenen.

Nun wird gezeigt, daß die Linie \overline{CDE} in der ζ -Ebene gemäß Bild 3.3 in eine Parabel der z -Ebene abgebildet wird. Die Gleichung der Graden mit dem konstanten Abstand a von der x -Achse ist:

$$\zeta = \xi + i a \quad (3.22)$$

In der Transformationsvorschrift wird daraus:

$$\begin{aligned} z &= x + i y = \zeta^2 = (\xi + i a)^2 \\ &= \xi^2 - a^2 + i 2 a \xi \end{aligned} \quad (3.23)$$

Der Real- und der Imaginärteil bilden die Koordinaten in der z -Ebene.

$$\begin{aligned} x &= \xi^2 - a^2 \\ y &= 2 a \xi \end{aligned} \quad (3.24)$$

Setzt man diese beiden Gleichungen über ζ gleich, so erhält man die Gleichung für eine Parabel.

$$x = \frac{y^2}{4 a^2} - a^2 \quad (3.25)$$

Damit ist die quadratische Transformation vollständig beschrieben.

3.2.3 Transformation nach Joukowski

Die Transformation, die einen Kreis in eine Ellipse transformiert, wurde erstmals von *Joukowski* angewendet.

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (3.26)$$

Die Kreisgleichung lautet:

$$\zeta = b e^{i\varphi} \quad (3.27)$$

In den Gln. (3.26) und (3.27) sind die Koeffizienten a und b Kreisradien, die in Bild 3.4 in der linken Abbildung auftreten.

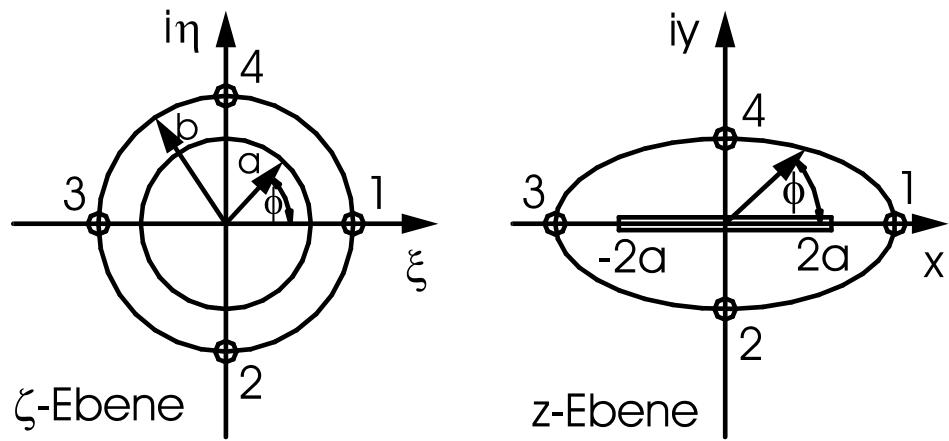


Bild 3.4 Joukowski–Transformation

Die Eigenschaften der Joukowski–Transformation sind:

- für $b > a$ wird der Kreis in eine Ellipse überführt,
- für $b = a$ wird der Kreis in eine ebene Platte überführt.

Nach Einsetzen von Gl. (3.27) in Gl. (3.26) folgt:

$$\begin{aligned}
 z &= b e^{i\varphi} + \frac{a^2}{b} e^{-i\varphi} \\
 &= b (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{a^2}{b} (\cos \varphi - i \sin \varphi) \\
 &= \left(b + \frac{a^2}{b} \right) \cos \varphi + i \left(b - \frac{a^2}{b} \right) \sin \varphi
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Das führt zu der Parameterdarstellung der Gleichung einer Ellipse.

$$x = \frac{b^2 + a^2}{b} \cos \varphi \quad (3.29)$$

$$y = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin \varphi$$

Im Fall einer ebenen Platte in der transformierten Ebene für $b = a$ in der ζ -Ebene wird aus Gl. (3.29):

$$\begin{aligned} x &= 2a \cos \varphi \\ y &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Aus dieser Gleichung kann die Ausdehnung der ebenen Platte in x -Richtung errechnet werden.

$$-2a \leq x \leq 2a \quad (3.31)$$

Die Ableitung der Transformationsvorschrift, Gl. (3.26), nach ζ gibt Auskunft über mögliche singuläre Punkte.

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \quad (3.32)$$

Die Diskussion dieser Ableitung führt zu den folgenden Schlüssen:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= 0 \quad \text{für} \quad \zeta = \pm a \\ \frac{dz}{d\zeta} &= \infty \quad \text{für} \quad \zeta = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Diese Singularitäten liegen beide innerhalb des Kreises mit dem Radius b und stören keineswegs die Berechnung der Strömung außerhalb dieses Kreises. Aus praktischer Sicht ist innerhalb des Kreises keine Strömung vorhanden.

3.2.4 Parallelströmung um eine ebene angestellte Platte

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Joukowski-Transformation für die Radienbeziehung $b > a$ eingesetzt. Das bewirkt, daß die Kreiskontur in eine elliptische überführt werden konnte. Nun wird für die Radien $b = a$ angenommen.

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (3.34)$$

mit

$$\zeta = a e^{i\varphi} \quad (3.35)$$

Es wird erwartet, daß die Transformation nach den Gln. (3.34) und (3.35) das in Bild 3.5 dargestellte Verhalten ergibt.

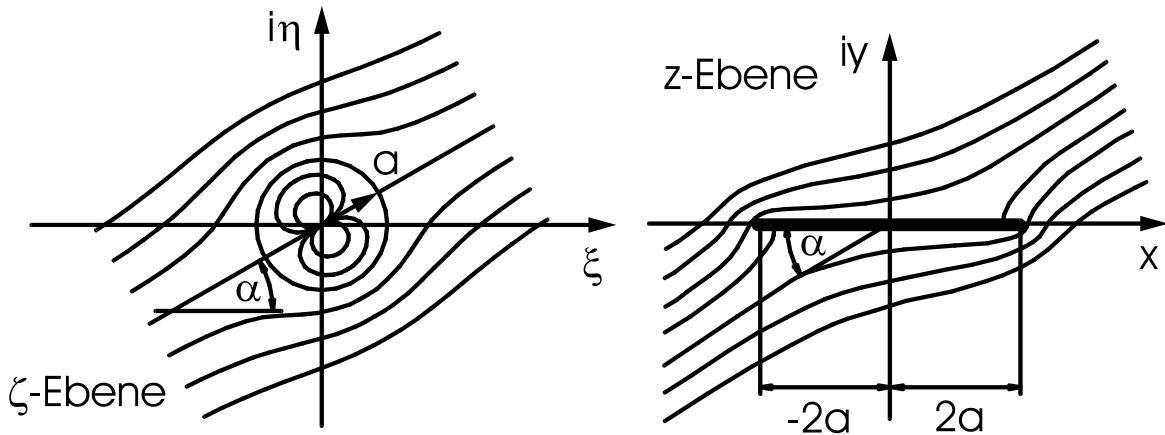


Bild 3.5 Parallelströmung um eine angestellte ebene Platte

Zunächst muß festgestellt werden, daß die Fernfeldbedingungen für die Kreisumströmung identisch mit denen der Plattenumströmung sind. Zu diesem Zweck kann Gl. (3.12) herangezogen werden.

$$\begin{aligned} u - i v &= \frac{dw}{dz} = \frac{dw/d\zeta}{dz/d\zeta} \\ &= \frac{dw}{d\zeta} \frac{1}{1 - \frac{a^2}{\zeta^2}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Der letzte Quotient in Gl. (3.36) wird eins, wenn $|\zeta| \rightarrow \infty$. Das bestätigt, daß beide Fernfeldbedingungen in Form der Geschwindigkeitskomponenten übereinstimmen.

$$\begin{aligned} u(z) &= u(\zeta) \\ v(z) &= v(\zeta) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Der Kreis nach Gl. (3.35) ist eine Stromlinie. Folglich beschreibt die Oberfläche der ebenen Platte auch eine Stromlinie. Diese Stromlinien sind folglich die inneren Randbedingungen an der ebenen Platte.

Das komplexe Potential der Strömung um einen Kreiszylinder ist in der ζ -Ebene nach Abschnitt 2.4.3:

$$w(\zeta) = V_\infty \left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta} e^{i\alpha} \right) \quad (3.38)$$

mit

$$\zeta = \rho e^{i\varphi} \quad (3.39)$$

Das Geschwindigkeitsfeld entsteht nach Ableitung von Gl. (3.38) nach $d\zeta$:

$$\frac{dw}{d\zeta} = V_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{\rho^2} e^{i\alpha} e^{-2i\varphi} \right) \quad (3.40)$$

Für $\rho = a$, was die Stromlinie an der Oberfläche beschreibt, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta} &= V_\infty e^{-i\varphi} \left(e^{i(\varphi-\alpha)} - e^{-i(\varphi-\alpha)} \right) \\ &= V_\infty e^{-i\varphi} 2i \sin(\varphi - \alpha) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Um Gl. (3.36) für die Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten an der Plattenoberfläche benutzen zu können, muß $dz/d\zeta$ bereit gestellt werden.

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \quad (3.42)$$

mit

$$\zeta = a e^{i\varphi} \quad (3.43)$$

Aus Gl. (3.42) für den Kreis mit dem Radius a entsteht dann:

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - e^{-2i\varphi} = e^{-i\varphi} \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \right) = 2i e^{-i\varphi} \sin \varphi \quad (3.44)$$

Die Substitution von den Gln. (3.41) und (3.44) in Gl. (3.36) eröffnet ein wichtiges Ergebnis.

$$u - i v = \frac{dw}{dz} = \frac{dw/d\zeta}{dz/d\zeta}$$

(3.45)

$$u = V_\infty \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi}$$

Die Geschwindigkeitskomponente u ist der Realteil der Gleichung. Der Imaginärteil ist null, das bedeutet, daß die Geschwindigkeitskomponente in Normalrichtung $v = 0$ ist. Das folgt exakt den Randbedingungen für reibungsfreie Strömungen, nämlich daß die Oberfläche eine Stromlinie darstellt und daß durch diese keine Strömung gehen darf.

Gl. (3.45) kann mit Hilfe von trigonometrischen Beziehungen umgeschrieben werden.

$$\sin(\varphi - \alpha) = \sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha$$

$$u = V_\infty \left(\cos \alpha - \sin \alpha \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right)$$

(3.46)

Einführen der Gl. (3.30) mit der folgenden trigonometrischen Beziehung ergibt für Gl. (3.46):

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

$$u = V_\infty \left(\cos \alpha \pm \sin \alpha \frac{\frac{x}{2a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2a}\right)^2}} \right)$$

(3.47)

Die Vorzeichen \pm beziehen sich auf die obere und die untere Plattenoberfläche. Die beiden Staupunkte treten in beiden Ebenen nach Gl. (3.46) bei $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \alpha + \pi$ auf, siehe auch Bild 3.5. Die Lage der Staupunkte folgt aus Gl. (3.47).

$$\left(\frac{x}{2a} \right)_{st} = \pm \cos \alpha$$

(3.48)

Für $\alpha = \pi/2$ liegen die Punkte bei $x_{st} = 0$. Für $\alpha = 0$ gibt es keine Staupunkte, zumal nach Gl. (3.47) $u = V_\infty = \text{konstant}$ gilt.

3.3 Anwendungen der konformen Abbildungen

3.3.1 Allgemeine Bemerkungen

Die Aufgabe der Methode der konformen Abbildungen ist, leicht berechenbare Strömungsfelder durch Transformation in kompliziertere zu überführen. Mit einer passenden Transformationsvorschrift kann die Strömung um einen Kreiszylinder innerhalb einer Parallelströmung in eine Strömung um ein Tragflügelprofil ebenso in einer Parallelströmung versetzt werden. Das ist als Beispiel in Bild 3.6 dargestellt.

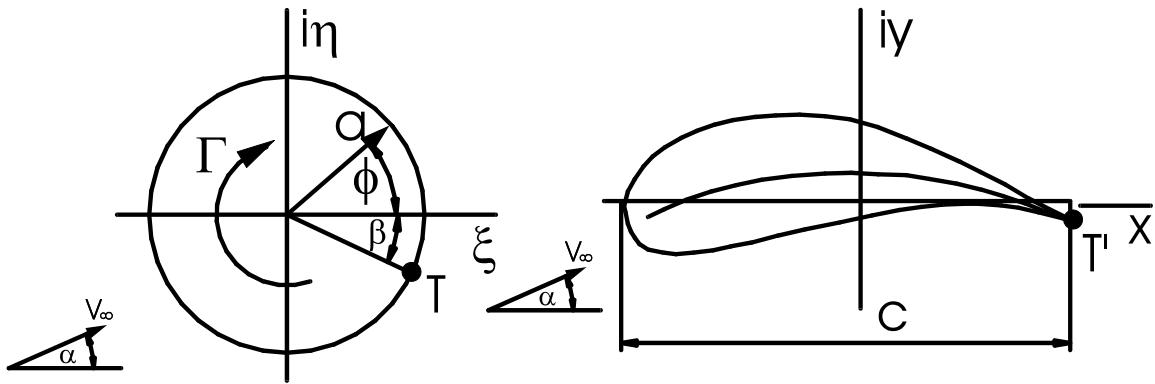


Bild 3.6 Konforme Abbildung für auftriebsbehaftete Profilumströmungen

Zur Vereinfachung ist der Mittelpunkt des Kreises in den Ursprung des Koordinatensystems in der ζ -Ebene gelegt worden. Die zu verwendende Transformationsfunktion mag die folgende Form besitzen.

$$z = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{(\zeta - \zeta_o)^n} \quad (3.49)$$

Darin bedeutet $C_n = A_n + i B_n$. Die Fernfeldbedingungen sollten wiederum in beiden Ebenen identisch sein.

$$\begin{aligned} |\zeta| &\rightarrow \infty \\ \frac{dz}{d\zeta} &= 1 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die äußeren Randbedingungen sind somit erfüllt.

Jetzt wird angenommen, daß das Profil in der z -Ebene an der Stelle T' eine scharfkantige Hinterkante habe. Diese Stelle entspricht dem Punkt T in der ζ -Ebene mit $\zeta_T = a e^{-i\beta}$. Offensichtlich kann an diesem Punkt die Winkeltreue nicht erhalten werden, da hier eine Diskontinuität an der Kontur existiert. Es folgt, daß am Punkt T eine Singularität vorliegt.

$$\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_T = 0 \quad (3.51)$$

Alle anderen Singularitäten, sofern weitere vorliegen, müssen sich innerhalb des Kreises befinden.

Die *Kutta-Bedingung* besagt, daß die Strömung nicht um die scharfkantige Hinterkante herumströmen darf. Gleichfalls herrscht dort die Geschwindigkeit null vor, was aus diesem Punkt einen hinteren Staupunkt macht, von dem eine Stromlinie ausgeht. Über diese Bedingungen wird die Zirkulation Γ um den Kreiszylinder sowie um das zweidimensionale Profil festgelegt.

Das komplexe Potential um einen Zylinder wurde bereits im Abschnitt 2.4.4 vorgegeben.

$$w(\zeta) = V_\infty \left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta} e^{i\alpha} \right) + \frac{i \Gamma}{2 \pi} \ln \zeta \quad (3.52)$$

Die Ableitung lautet:

$$\frac{d w}{d \zeta} = V_\infty \left(e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta^2} e^{i\alpha} \right) + \frac{i \Gamma}{2 \pi \zeta} \quad (3.53)$$

Damit ergibt sich für die komplexe Geschwindigkeit um den Kreiszylinder:

$$\frac{d w}{d \zeta} = 2 V_\infty i e^{-i\varphi} \sin(\varphi - \alpha) + \frac{i \Gamma}{2\pi a} e^{-i\varphi} \quad (3.54)$$

Der Absolutbetrag der Geschwindigkeit errechnet sich zu:

$$\left| \frac{d w}{d \zeta} \right| = 2 V_\infty \sin(\varphi - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (3.55)$$

Dieser Wert muß im Staupunkt T für $\zeta_T = a e^{-i\beta}$ mit $\varphi_T = -\beta$ zu null werden. Aus Gl. (3.55) wird folglich:

$$2 V_\infty \sin(\beta + \alpha) = \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (3.56)$$

Die aus der Kutta–Bedingung resultierende Zirkulation wird somit:

$$\Gamma = 4 \pi a V_\infty \sin(\alpha + \beta) \quad (3.57)$$

Nach dem *Kutta–Joukowski–Theorem* wird die Auftriebskraft A pro Einheit in der Flügelspannweite durch die Zirkulation um den Auftriebskörper berechenbar.

$$A = \rho_\infty V_\infty^2 \Gamma \quad (3.58)$$

Aus der Definition für den Auftriebsbeiwert c_a und mit der Profiltiefe c entsteht für die Zirkulation aus den Gln. (3.57) und (3.58):

$$\begin{aligned} c_a &= \frac{A}{1/2 \rho_\infty V_\infty^2 c} \\ &= 8 \pi \frac{a}{c} \sin(\alpha + \beta) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Aus praktischen Erwägungen heraus kann diese Formel vereinfacht werden, wenn für $c \approx 4a$ und für $\sin(\alpha + \beta) \approx \alpha + \beta$ gesetzt wird. Der Auftriebsbeiwert reduziert sich zu:

$$c_a \approx 2 \pi (\alpha + \beta) \quad (3.60)$$

und dessen Steigung wird:

$$\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \approx 2\pi \quad (3.61)$$

Für Null–Auftrieb muß daraus folgend der Anstellwinkel α von der gleichen Größe wie der Winkel der Hinterkante β allerdings mit negativem Vorzeichen sein.

$$\alpha_{A=0} = -\beta \quad (3.62)$$

Diese Ergebnisse lassen sich recht allgemein auf zweidimensionale Profile anwenden.

3.3.2 Joukowski—Transformation

Die allgemeine Transformationsvorschrift, Gl. (3.49), läßt sich auf eine spezielle Form reduzieren, wenn man für $C_1 = a^2$, $C_n (n \neq 1) = 0$ und $\zeta_0 = 0$ setzt.

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (3.63)$$

Diese Transformation wird *Joukowski–Transformation* genannt. Sie transformiert den Kreis $\zeta = a e^{i\varphi}$ in eine ebene Platte. Aus Bild 3.7 ist zu erkennen, daß der hintere Staupunkt bei $\beta = 0$ auf der x -Achse liegt.

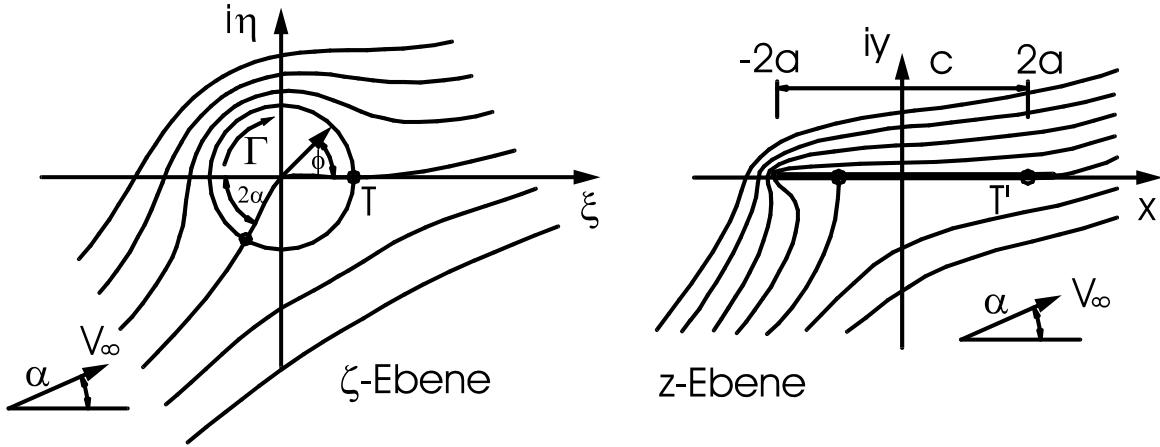


Bild 3.7 Strömung entlang einer ebenen angestellten Platte

Mit der komplexen Geschwindigkeit um den Kreiszylinder nach Gl. (3.54) und der Zirkulation Γ nach Gl. (3.57) kann die komplexe Geschwindigkeit so berechnet werden, daß der Punkt T zum Staupunkt wird. Aus Gl. (3.54) entsteht dann:

$$\frac{dw}{d\zeta} = 2 V_\infty i e^{-i\varphi} [\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha] \quad (3.64)$$

Die Staupunkte an dem Kreis liegen an den folgenden Positionen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi + 2\alpha$. Gl. (3.64) muß dafür durch $dz/d\zeta$ dividiert werden.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= 1 - \frac{a^2}{\zeta^2} e^{-2i\varphi} \\ &= 2i e^{-i\varphi} \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.65)$$

Die Geschwindigkeit um die ebene Platte in der transformierten z -Ebene schreibt sich nun:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{dw/d\zeta}{dz/d\zeta} = u - i v \\ &= V_\infty \frac{\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha}{\sin \varphi} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Da es in Gl. (3.66) keinen Imaginärteil gibt, kann folgendes nach der Anwendung einer trigonometrischen Beziehung geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} = u &= V_\infty \left(\cos \alpha - \sin \alpha \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \right) \\ &= V_\infty \left(\cos \alpha + \sin \alpha \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)\end{aligned}\quad (3.67)$$

mit $\cos \varphi = x/2a$ und $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ wird die Geschwindigkeitskomponente u :

$$\begin{aligned}u &= V_\infty \left(\cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\frac{1 - x/2a}{1 + x/2a}} \right) \\ &= V_\infty \left(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\varphi}{2} \right)\end{aligned}\quad (3.68)$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß die Geschwindigkeit am vorderen Staupunkt $u = \infty$ für $\varphi = \pi$ und am hinteren Staupunkt $u = V_\infty \cos \alpha$ für $\varphi = 0$. Der Staupunkt an der Vorderkante liegt bei $\varphi = \pi + 2\alpha$ unterhalb der Platte oder umgeschrieben bei $x = -2a \cos \alpha$.

Der Auftriebsbeiwert c_a pro Einheit in der Flügelspannweite ist für $\beta = 0$ nach Gl. (3.60)

$$c_a \approx 2\pi \alpha \quad (3.69)$$

Ein Vergleich dieses analytischen Ansatzes mit Messungen an einer angestellten ebenen Platte und einem dünnen symmetrischen Tragflügelprofil ist in Bild 3.8 wiedergegeben.

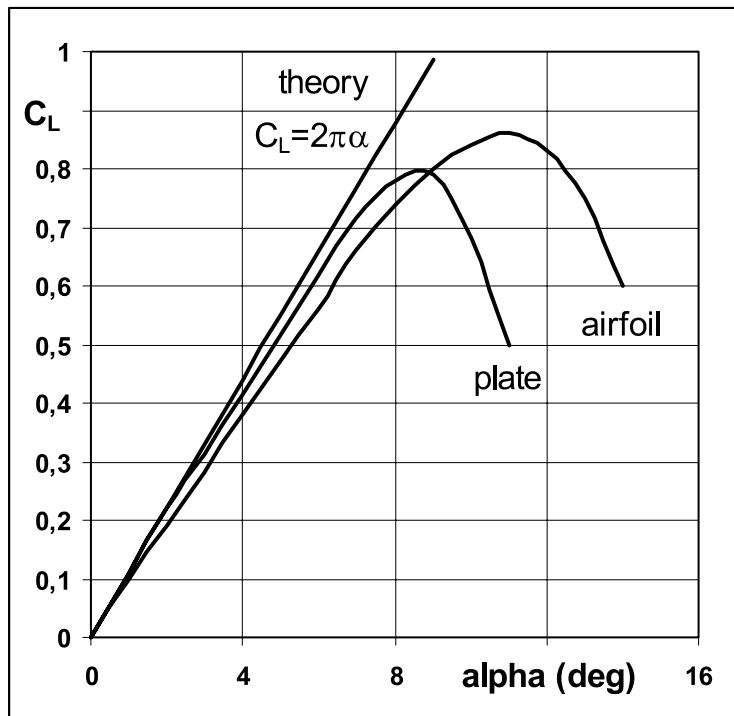


Bild 3.8 Auftriebsbeiwert über dem Anstellwinkel für eine ebene Platte und ein Tragflügelprofil

Die Joukowski–Transformation ist nicht nur geeignet, um Kreisgeometrien in ebene Platten zu überführen, sondern auch in die sogenannten *Joukowski–Profile* zu erzeugen. Solche sind in Bild 3.9 dargestellt.

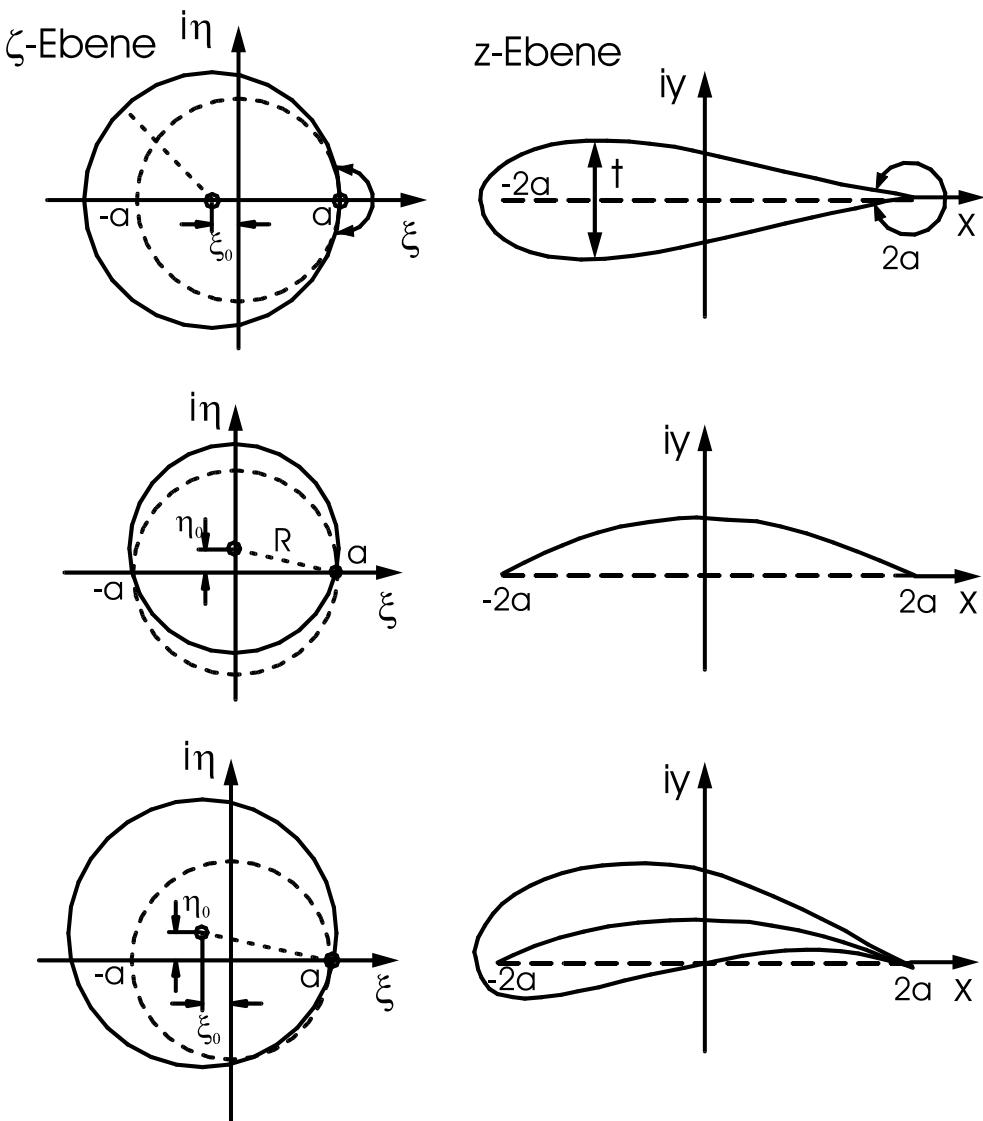


Bild 3.9 Joukowski-Profile beschrieben durch unterschiedliche Lage der zu transformierenden Kreisgeometrien in der ζ -Ebene

In Bild 3.9 beschreibt die innere gestrichelte Kreisabbildung in der z -Ebene die ebene Platte. Die versetzte Lage des durchgezogenen Kreises ermöglicht die Entwicklung verschiedenster Profile:

- *symmetrische Profile*, wenn der Kreismittelpunkt auf der ξ -Achse liegt,
- *dünne, gekrümmte Profile*, wenn der Kreismittelpunkt auf der η -Achse liegt,
- *dicke, gekrümmte Profile*, wenn der Kreismittelpunkt bei $\xi < 0$ und $\eta \neq 0$ liegt.

Die charakteristische Eigenschaft der Joukowski–Transformation für die Erstellung von Profilen ist die Versetzung des Kreismittelpunktes.

$$\begin{aligned}\zeta &= \zeta_o + a e^{i\varphi} \\ &= \xi_o + i \eta_0 + a e^{i\varphi}\end{aligned}\tag{3.70}$$

Aber die zu nutzende Transformationsvorschrift ist durch Gl. (3.63) gegeben.

3.3.3 Modifizierte Joukowski—Transformation

Identische Profile können allerdings auch durch die Abbildung eines Kreises mit dem Ursprung in der ζ -Ebene und einer leicht modifizierten Form der allgemeinen Transformation, Gl. (3.49), erreicht werden.

$$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta - \zeta_o} \tag{3.71}$$

mit $C_I = b^2 (< a^2)$ und $C_n = 0$ für $n \neq I$.

Die singulären Punkte dieser Transformation liegen bei $\zeta - \zeta_0 = \pm b$, da gilt:

$$\zeta - \zeta_0 = \pm b \tag{3.72}$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{b^2}{(\zeta - \zeta_o)^2} = 0$$

Die Lage des Punktes T auf dem Kreis ist so gewählt, daß $\zeta_T = \zeta_0 + b$ ist und dieses mit der Lage des hinteren Staupunktes des Profils korrespondiert. Wenn dann mit $\zeta_0 = \varepsilon e^{i\delta}$ worin $\varepsilon \ll a$ und $-\pi/2 \leq \delta \leq 0$ sich das folgende für ζ_T ergeben muß:

$$\begin{aligned}\zeta_T &= \zeta_0 + b \\ &= a e^{i\varphi_T} = \varepsilon e^{i\delta} + b\end{aligned}\tag{3.73}$$

Mit Hilfe von trigonometrischen Transformationen und dem Verfahren des Koeffizientenvergleichs wird damit für den Absolutbetrag für a :

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 + b^2 + 2 \varepsilon b \cos \delta} \tag{3.74}$$

Um daraufhin die Kontur des Profils in der z -Ebene zu erhalten, muß Gl. (3.71) neu geschrieben werden.

$$\begin{aligned}
z &= x + i y \\
&= a e^{i\varphi} + \frac{b^2}{a e^{i\varphi} - \varepsilon e^{i\delta}}
\end{aligned}
\tag{3.75}$$

Für $\varepsilon \ll a$, was zu dünnen Profilen mit kleiner Krümmung für praktische Fälle führt, erhält man den folgenden allgemeinen Parameterausdruck für Profile.

$$\begin{aligned}
x &= 2 a \cos \varphi + \varepsilon [\cos(\delta - 2\varphi) - 2 \cos \delta \cos \varphi] \\
y &= \varepsilon [\sin(\delta - 2\varphi) - 2 \cos \delta \sin \varphi]
\end{aligned}
\tag{3.76}$$

Bei Veränderung der Winkelgrößen ε und δ können die verschiedenen Profile aus Bild 3.9 gewonnen werden.

4 Linearisierte Theorie dünner Profile

4.1 Prinzip der Theorie dünner Profile

Die im Folgenden zu beschreibende Theorie macht sich zur Aufgabe, reibungsfreie, inkompressible Strömungen, die auch Potentialströmungen genannt werden, um Profile berechnen zu können. Die Werkzeuge dazu sind, wie bereits in Kapitel 2 beschrieben, kontinuierliche Verteilungen von Wirbeln, Quellen und Senken, die ebenfalls Singularitäten genannt werden. Aus Vereinfachungsgründen bei der Anwendung einer solchen Methode müssen zunächst einige Annahmen getroffen werden. Diese Annahmen *linearisieren* das zu behandelnde Problem, womit eine *Näherung* oder *Approximation* an das vollständige, kompliziertere Problem erzielt wird.

Betrachtet man ein dünnes Tragflügelprofil, so können die folgenden physikalisch sinnfälligen Vereinfachungen vorgeschrieben werden:

- Der Anstellwinkel α ist klein,
- die Profilkrümmung ist klein,
- die Profildicke ist klein,
- die Komponente u der Störungsgeschwindigkeit ist klein.

Gemäß dieser gemachten Annahmen lautet der Name dieser Theorie: *Linearisierte Theorie dünner Tragflügel*.

In Bild 4.1 wird ein Tragflügelprofil mit einer gekrümmten Skeletlinie und einer Dickenverteilung und den dazugehörigen geometrischen Bedingungen beschrieben.

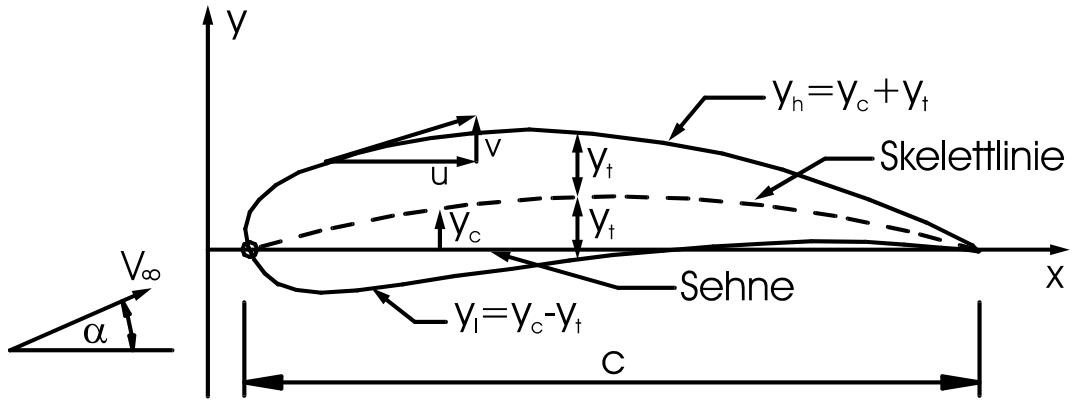


Bild 4.1 Definition der Skelettlle und der Dickenverteilung

Die Skelettlle und die Dickenverteilung haben die folgenden Definitionen.

$$\text{Skelettlle} \quad y_c = \frac{1}{2} (y_u + y_e) \quad (4.1)$$

$$\text{Dickeverteilung} \quad y_t = \frac{1}{2} (y_h - y_e) \quad (4.2)$$

So ein dünnes Tragflügelprofil stört eine reibungsfreie, inkompressible Parallelströmung und daher kann ein *gestörtes* Strömungsfeld durch zwei elementare Potentialströmungen erzeugt werden:

- Eine kontinuierliche Verteilung von Wirbeln entlang der graden Profilsehne c repräsentiert die Skelettlle unter einem Anstellwinkel α gemäß Bild 4.2.

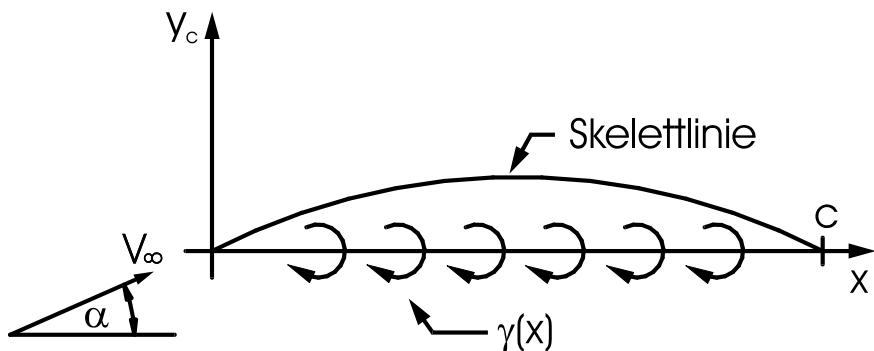


Bild 4.2 Skelettlle repräsentiert durch eine kontinuierliche Wirbelverteilung

- Eine kontinuierliche Verteilung von Quellen und Senken entlang der Profilsehne c repräsentiert eine symmetrische Dickenverteilung bei einem Null-Anstellwinkel gemäß Bild 4.3.

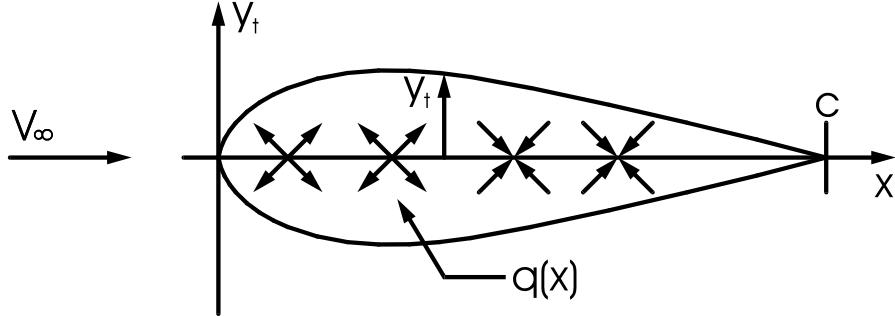


Bild 4.3 Dickenverteilung repräsentiert durch eine kontinuierliche Quellen- und Senkenverteilung

In Bild 4.2 ist $\gamma(x)$ die Wirbelstärke und $q(x)$ in Bild 4.3 stellt die Quellen- und Senkenverteilung auf der Profilsehne dar. Die Steigung der Kontur des dünnen Tragflügels in Bild 4.1 wird durch die Kombination aus den Geschwindigkeitskomponenten der Parallelströmung und denen der Störgeschwindigkeitskomponenten u und v in x - und y -Richtung, die aus den kontinuierlichen Verteilungen der Wirbel-, Quellen- und Senkenverteilungen entlang der Profilsehne induziert werden, gebildet.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{profile} = \frac{V_\infty \sin \alpha + v}{V_\infty \cos \alpha + u} \quad (4.3)$$

Wenn α klein ist und u im Vergleich zu V_∞ sehr klein ausfällt, kann aus Gl. (4.3) übrigbleiben:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{profile} \approx \alpha + \frac{v}{V_\infty} \quad (4.4)$$

Da der Abstand zwischen der Profilsehne und der Skelettlleie sehr klein ist, wäre sicher auch die Störkomponente v etwa gleich groß auf diesen beiden Linien. Danach gilt die Gl. (4.4) auch auf der Profilsehne selbst. Aus diesem Grund kann sie in die bereits genannten beiden Anteile der Potentialströmungen aufgeteilt werden.

Mit der Geschwindigkeit $v_\gamma(x)$, die auf der Wirbelstärkenverteilung $\gamma(x)$ beruht, schreibt sich die Skeletlinie $y_c(x)$ auf die folgende Weise:

$$\frac{d y_c}{d x} = \alpha + \frac{v_\gamma(x)}{V_\infty} \quad (4.5)$$

Mit der Geschwindigkeit $v_q(x)$, die auf der Quellen- und Senkenstärkenverteilung $q(x)$ beruht, schreibt sich die Dickenverteilung $y_t(x)$ folgendermaßen:

$$\frac{d y_t}{d x} = \pm \frac{v_q(x)}{V_\infty} \quad (4.6)$$

Der nächste Schritt ist die Definition der Normalgeschwindigkeiten $v_\gamma(x)$ und $v_q(x)$ in den Gln. (4.4) und (4.6).

4.2 Induzierte Geschwindigkeiten durch Singularitätenverteilungen

Die Beziehungen zwischen den Wirbel-, Quellen- und Senkenverteilungen zu den induzierten Geschwindigkeiten entlang der Profilsehne werden nunmehr entwickelt, um die Randbedingungen in das Problem mit aufnehmen zu können.

Nun wird eine kontinuierliche Verteilung der Quellenstärke $q(x)$ entlang der x -Achse von $x = 0$ bis $x = c$ angenommen, wie sie in Bild 4.4 illustriert ist.

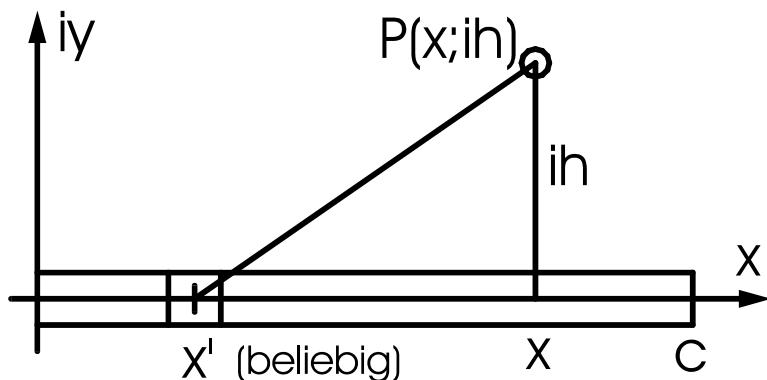


Bild 4.4 Kontinuierliche Quellenverteilung entlang der x -Achse

Die komplexe Geschwindigkeit am Punkt $P(x,ih)$ ergibt sich gemäß Gl. (2.39) zu:

$$\begin{aligned}\frac{d w}{d z} &= u_q - i v_q \\ &= \int_0^c \frac{q(x') dx'}{2\pi(x + ih - x')} \end{aligned}\tag{4.7}$$

Diese Gleichung kann in einen Real- und einen Imaginärteil aufgespalten werden.

$$u_q(x, h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{(x - x') q(x') dx'}{(x - x')^2 + h^2} \tag{4.8}$$

$$v_q(x, h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{h q(x) dx'}{(x - x')^2 + h^2} \tag{4.9}$$

Entlang der Profilsehne sind die Randbedingungen für $h \rightarrow 0$ berechenbar. Indem man den Grenzübergang bildet und den *Cauchy-Hauptwert* P einführt, gewinnt man daraus:

$$u_q(x) = \frac{1}{2\pi} P \int_0^c \frac{q(x') dx'}{(x - x')} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}v_q(x) &= \frac{q(x)}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \frac{h dx'}{(x - x')^2 + h^2} \\ &= \frac{q(x)}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\tan^{-1} \left(\frac{x - x'}{h} \right) \right]_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \\ &= \pm \frac{1}{2} q(x)\end{aligned}\tag{4.11}$$

Für die Wirbelverteilung $\gamma(x)$ für die Einheitstiefe und $\gamma > 0$ im Uhrzeigersinn gilt dieselbe Prozedur wie für die vorher beschriebene kontinuierliche Quellenverteilung. Die komplexe Geschwindigkeit am Punkt $P(x,ih)$ lautet in diesem Fall gemäß Gl. (2.54):

$$\frac{d w}{d z} = u_\gamma - i v_\gamma = i \int_0^c \frac{\gamma(x') d x'}{2\pi(x + i h - x')} \quad (4.12)$$

Wiederum wird diese Gleichung für $h \rightarrow 0$ entwickelt und in einen Real- und einen Imaginärteil aufgespalten.

$$u_\gamma(x) = \pm \frac{1}{2} \gamma(x) \quad (4.13)$$

$$v_\gamma(x) = \frac{-1}{2\pi} P \int_0^c \frac{\gamma(x') d x'}{(x - x')} \quad (4.14)$$

Da nun alle Unbekannten bestimmt sind, kann die allgemeine Prozedur der linearen Theorie dünner Tragflügelprofile in die folgenden zu durchlaufenden Schritte unterteilt werden:

- Da die Profilkrümmung, Gl. (4.5), und die Dickenverteilung, Gl. (4.6), im Vorhinein geometrisch bekannt sind, können die kontinuierliche Wirbelverteilung $\gamma(x)$ und die kontinuierliche Quellenverteilung $q(x)$ aus den wohlgesetzten Randbedingungen durch die Einführung von Gl. (4.11) in Gl. (4.6) und Gl. (4.14) in Gl. (4.5) berechnet werden.
- Wenn die kontinuierliche Wirbelverteilung $\gamma(x)$ und die kontinuierliche Quellenverteilung $q(x)$ erst bestimmt sind, können nacheinander die *tangentialen Störgeschwindigkeiten* u_γ aus der Wirbelverteilung und u_q aus der Quellenverteilung nach Gl. (4.13) und Gl. (4.8) ermittelt werden. Somit kann die gesamte Tangentialgeschwindigkeit zusammengesetzt werden.

$$U(x) = V_\infty + u_\gamma(x) + u_q(x) \quad (4.15)$$

- Über die Bernoulli-Gleichung ist es daraufhin möglich, die Druckverteilung entlang der Profiloberfläche zu berechnen.

Aus diesem vorgestellten Verfahren geht hervor, daß im Rahmen der Vereinfachungen dieser linearisierten dünnen Profiltheorie die entscheidenden primären Profilparameter ermittelt werden können. Dazu gehören der Auftriebs- und der Momentenbeiwert und der

Anstellwinkel $\alpha_{A=0}$ bei Nullauftrieb, sowie die Lage des aerodynamischen Zentrums. Dazu bedarf es der kontinuierlichen Wirbelverteilung $\gamma(x)$, welche die Form der Skelettligne und den Anstellwinkel repräsentiert. Die Hinzufügung einer kontinuierlichen Quellenverteilung $q(x)$ für die Beschreibung der Form der Profildicke führt zu einer größeren Genauigkeit in der Berechnung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung um das Profil, was maßgebend für reibungsbehaftete Strömungsberechnung, nämlich die Grenzschichtberechnung sein wird.

4.3 Skelettligne und Effekte des Anstellwinkels

Die Randbedingung, Gl. (4.5), und die induzierte *normale* Geschwindigkeitskomponente $v_\gamma(x)$, die aus der Wirbelverteilung nach Gl. (4.14) entsteht, stellen die fundamentalen Gleichungen für die Bestimmung der kontinuierlichen Wirbelverteilung $\gamma(x)$ dar.

$$\begin{aligned} v_\gamma(x) &= V_\infty \left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right) \\ &= \frac{-1}{2\pi} P \int_0^c \frac{\gamma(x') dx'}{(x - x')} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Folgt man dieser Methode, die von *Glauert* entwickelt wurde, so ist es sinnvoll, trigonometrische Reihen für die Präsentation von $\gamma(x)$ einzuführen. Das wird durch eine Transformation, deren geometrische Bedeutung in Bild 4.5 dargestellt ist, erreicht.

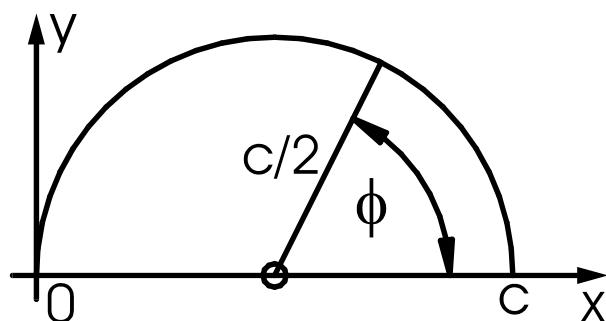


Bild 4.5 Trigonometrische Transformation nach Glauert

Diese Transformationsvorschrift lautet:

$$x = \frac{c}{2} (1 + \cos \phi) \quad (4.17)$$

$$\frac{dx}{d\phi} = -\frac{c}{2} \sin \phi$$

In dieser Transformation wird der vordere Staupunkt bei $x = 0$, was $\phi = \pi$ entspricht, liegen und der hintere Staupunkt findet sich bei $x = c$, was $\phi = 0$ entspricht.

Ersetzt man dann die x -Abhängigkeit in Gl. (4.16) durch die Transformationsvorschrift in Gl. (4.17), so entsteht ein neuer einfacher zu berechnender Zusammenhang für die induzierte normale Geschwindigkeitskomponente $v_\gamma(x)$.

$$v_\gamma(x) = V_\infty \left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right) \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{2\pi} P \int_0^\pi \frac{\gamma(\phi') \sin \phi' d\phi'}{\cos \phi' - \cos \phi}$$

Hierin sind als Randbedingungen die Skeletlinie dy_c/dx , der Anstellwinkel α und die ungestörte Anströmgeschwindigkeit V_∞ bereits bekannt.

Eine Lösung für die kontinuierliche Wirbelverteilung $\gamma(\phi)$ mit der Kutta-Bedingung $\gamma(c) = \gamma(\phi = 0) = 0$, was nämlich die Lage des hinteren Staupunktes direkt an die Profilhinterkante bindet, ergibt unmittelbar die Stromlinie entlang der Skeletlinie. Eine solche Lösung wird aus der Theorie der Integralgleichungen gewonnen.

$$\gamma(\phi) = 2V_\infty \left[(\alpha + A_0) \frac{1 - \cos \phi}{\sin \phi} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\phi) \right] \quad (4.19)$$

Darin gilt: $\tan \frac{\phi}{2} = \frac{1 - \cos \phi}{\sin \phi}$

Wie gefordert ist die Kutta-Bedingung an der Stelle $\phi = 0$ erfüllt. Wenn die Koeffizienten der Reihenentwicklung A_0 und A_n zu null gewählt werden, wird die Lösung für die ebene Platte, Gl. (3.68), bei kleinen Anstellwinkeln α erzeugt. Dafür ist die Wirbelverteilung $\gamma(\phi)$:

$$\gamma = 2 V_\infty \alpha \tan \frac{\phi}{2} \quad (4.20)$$

Mit Gl. (4.13) wird dann die Tangentialgeschwindigkeit entlang der Oberfläche einer anstellten ebenen Platte:

$$u = V_\infty + u_\gamma$$

$$= V_\infty \pm \frac{1}{2} \gamma \quad (4.21)$$

$$= V_\infty \left(1 \pm \alpha \tan \frac{\phi}{2} \right)$$

Dieses Ergebnis entspricht genau der Lösung, die über die Methode der konformen Abbildungen nach Gl. (3.68) erreicht wurde.

Eine Lösung der Gl. (4.18) kann auch durch die Anwendung des *Poisson–Glauert–Integrals* gefunden werden, wenn nur die Wirbelverteilung $\gamma(\phi)$ bekannt ist. Diese Integral heißt:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\phi')}{\cos\phi' - \cos\phi} \alpha \phi' = \pi \frac{\sin(n\phi)}{\sin\phi} \quad (4.22)$$

Nach einigen umfangreicher trigonometrischen Umformungen kann Gl. (4.18) mit Hilfe von Gl. (4.19) für die γ -Verteilung umgeschrieben werden.

$$\frac{d y_c}{d x} = - \left(A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\phi) \right) \quad (4.23)$$

Durch diese Gleichung ist die kontinuierliche Wirbelverteilung $\gamma(\phi)$ an die Kontur der Skeletlinie gebunden. Die Koeffizienten A_0 und A_n werden in der Praxis durch die Forderungen $y_c = 0$ für $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ und durch eine Anzahl von Werten n der Steigung der Skeletlinie dy_c/dx für das Profil bestimmt. Daher ist die Kosinus-Reihe durch r Terme ($n = r$) festgelegt. Auch können die Koeffizienten A_n durch *Fourier–Koeffizienten* entwickelt werden.

$$A_o = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_c}{dx} d\phi \quad (4.24)$$

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_c}{dx} \cos(n\phi) d\phi$$

Damit wird nun die tangentiale Geschwindigkeit entlang der Skeletlinie:

$$\begin{aligned} u(x) &= V_\infty + u_\gamma \\ &= V_\infty \pm \frac{\gamma}{2} \\ &= V_\infty \left[1 \pm \left\{ (\alpha + A_o) \tan \frac{\phi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\phi) \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Daraus geht hervor, daß die Geschwindigkeit am vorderen Staupunkt für $\phi = \pi$ unendlich groß wird, wenn nicht $\alpha = -A_o$ gesetzt wird. Dieser Anstellwinkel wird *idealer Anstellwinkel* genannt.

4.4 Dickenverteilung

Die Dickenverteilung $q(x)$ eines Profils berechnet sich aus der Kombination von Gl. (4.6) und Gl. (4.11).

$$q(x) = 2V_\infty \frac{dy_t}{dx} \quad (4.26)$$

Für die Dickenverteilung wird die folgende Reihenentwicklung vorgeschlagen:

$$y_t = \frac{c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\phi) \quad (4.27)$$

Die u_q -Komponente der tangentialen Geschwindigkeitsverteilung, die durch eine endliche Dickenverteilung des Profils hervorgerufen wird, ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (4.25) in Gl. (4.10).

$$\begin{aligned}
u_q(x) &= \frac{1}{2\pi} P \int_0^c \frac{q(x') dx'}{(x - x')} \\
&= -\frac{V_\infty}{\pi} \int_0^c \frac{dy_t/dx}{(x' - x)} dx'
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Wiederum wird die trigonometrische Transformation nach Gl. (4.17) genutzt und durch Einsetzen der Ableitung von Gl. (4.26) nach ϕ' in Gl. (4.27) wird daraus:

$$\begin{aligned}
u_q(\phi) &= \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum B_n n \cos(n\phi')}{(\cos\phi' - \cos\phi)} \\
&= \frac{V_\infty}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} B_n n \int_0^\pi \frac{\cos(n\phi')}{(\cos\phi' - \cos\phi)} d\phi'
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Das Integral in dieser Gleichung ist ebenso das Poisson–Glauert–Integral, was nach Gl. (4.22) ersetzt werden kann. Damit wird aus Gl. (4.29):

$$u_q(\phi) = V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} B_n n \frac{\sin(n\phi)}{\sin\phi} \tag{4.30}$$

Die gesamte Tangentialgeschwindigkeit ohne den Krümmungseinfluß der Skeletlinie ist:

$$u(\phi) = V_\infty + u_q(\phi) \tag{4.31}$$

In den Staupunkten an den Stellen $x = 0$ oder $\phi = \pi$ und bei $x = c$ oder $\phi = 0$ wird diese Geschwindigkeit im allgemeinen nicht null, weil das Folgende gilt:

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{\sin(n\phi)}{\sin\phi} = n \tag{4.32}$$

Daher ist die Annahme $u_q \ll V_\infty$ an den Staupunkten nicht gültig. Ein von Riegels eingebrührter Korrekturfaktor ermöglicht die verschwindende Geschwindigkeitskomponente in den Staupunkten.

$$u(\phi) = \frac{1}{\kappa} (V_\infty + u_q(\phi)) \tag{4.33}$$

Der in Gl. (4.33) eingeführte Korrekturfaktor κ lautet:

$$\kappa = \left[1 + \left(\frac{dy_t}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

Die Ergebnisse der Gl. (4.33) werden dadurch in der Nähe der Staupunkte verbessert.

4.5 Gekrümmte Profile mit Dickenverteilung

Die Geschwindigkeitsverteilung entlang eines unendlich dünnen Profils, das durch eine Skeletlinie unter einem Anstellwinkel α steht, wird durch Gl. (4.25) beschrieben. Die Geschwindigkeitsverteilung für ein symmetrisches Profil bei Nullanstellung liefert Gl. (4.29).

Die Geschwindigkeitsverteilung entlang einer Oberfläche eines gekrümmten Profils mit endlicher Dicke unter einem Anstellwinkel α muß dann durch die Superposition beider genannten Anteile approximiert werden können.

$$u(\phi) = \frac{1}{\kappa} [V_\infty + u_\gamma(\phi) + u_q(\phi)] \quad (4.35)$$

Die Parallelströmung in Gl. (4.35) wird durch den Betrag der ungestörten Strömung V_∞ beschrieben. Der Anteil der Geschwindigkeit $u_\gamma(\phi)$ durch die kontinuierliche Wirbelverteilung $\gamma(\phi)$ stellt sich in der allgemeinen Form dar als:

$$u_\gamma(\phi) = \pm V_\infty \left[(\alpha + A_o) \tan \frac{\phi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\phi) \right] \quad (4.35)$$

Der dritte Anteil der Geschwindigkeit $u_q(\phi)$, hervorgerufen durch die kontinuierliche Quellenverteilung $q(\phi)$, ist in der allgemeinen Form:

$$u_q(\phi) = V_\infty \sum_{\mu=1}^{\infty} B_n \mu \frac{\sin(n\phi)}{\sin\phi} \quad (4.36)$$

Als letztes fehlt nur noch die Korrektur nach Riegels für das Verhalten der Strömung in der Nähe der Staupunkte, wo normalerweise die Geschwindigkeit null herrschen muß.

$$\kappa = \left[1 + \left(\frac{dy_t}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.37)$$

Die Ergebnisse dieses Kapitels über die *Linearisierte Theorie dünner Tragflügelprofile* stellt wenigstens eine der Möglichkeiten der Behandlung reibungsfreier, inkompressibler Strömungen um zweidimensionale Profile beliebiger Kontur dar. Im Folgenden werden weitere Möglichkeiten der Berechnung dieser zweidimensionalen Strömungen vorgestellt.

5 Panel-Methode für Profilumströmungen

5.1 Methode diskreter Singularitätenverteilungen

Die *linearisierte Theorie dünner Tragflügelprofile*, die im vorherigen Kapitel 4 diskutiert wurde, zieht Nutzen aus kontinuierlichen Verteilungen von Quellen- und Wirbelstärken entlang der gesamten Skelett- oder Profillinien dünner Tragflügelprofile. Modernere Methoden, die auf Rechnereinsatz bauen können, besetzen die Oberfläche von Profilen entlang der in linearen Längenelemente aufgeteilten Ober- und Unterseite durch diskrete und konstante Quellen- und Senkenstärken. Dieser Sachverhalt ist in Bild 5.1 demonstriert.

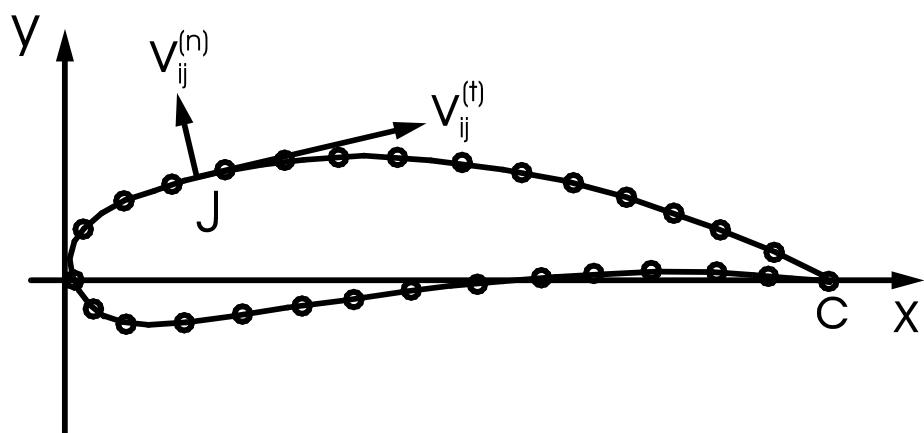


Bild 5.1 Segmentierte Oberfläche mit diskreter Quellen- und Wirbelverteilung

Das Prinzip dieser Methode ist die Berechnung von Normalgeschwindigkeiten an Kontrollpunkten, die durch die Verteilung aller Quellen und Wirbel entlang diskreter Segmen-

te, die *Panel* genannt werden, induziert werden. Diese normalen Geschwindigkeitskomponenten müssen die Normalkomponente der Parallelströmung derart kompensieren, daß die verbleibende Komponente $v_n = 0$ wird, so daß die Randbedingung der Oberfläche erfüllt werden kann. Diese Randbedingung besagt, daß die Körperkontur eine Stromlinie sein muß, durch die keine Strömung hindurchtreten darf.

Durch die Erfüllung dieser Randbedingung kann die Singularitätenverteilung ermittelt werden. Über die verbleibende tangentiale Geschwindigkeitsverteilung kann mit Hilfe der Bernoulli–Gleichung die Druckverteilung berechnet werden.

Diese von *Smith und Hess* entwickelte Methode wird auch *Panel–Methode* genannt und ist die erste dieser Art. Sie wurde bisher für viele Strömungsprobleme, für die die Anwendung der Potentialströmungen möglich ist, eingesetzt. Anwendungsbeispiele sind:

- Interne und externe Strömungen
- Multi–Elemente Tragflügelprofile
- Kaskadenströmungen
- Profile in scherenden Strömungen
- Profile mit Ausblasung und Absaugung
- Allgemeine dreidimensionale Strömungen

Die Voraussetzung für diese Strömungsformen ist die Drehungs- und Reibungsfreiheit, also das Vorliegen einer Potentialströmung.

5.2 Profile ohne Auftrieb

Da die hier zu beschreibende Methode, die auf analytischen Überlegungen beruht, mit Hilfe von *numerischen mathematischen Methoden* gelöst werden muß, ist es nötig, daß die Kontur des Profils in diskreten Koordinatenpunkten vorliegen muß. Die ungestörte Anströmgeschwindigkeit V_∞ , die ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit den Wert eins annehmen sollte, und der Anstellwinkel α sind weitere Angaben, die zu einer Lösung notwendig sind.

Das Lösungsverfahren besteht aus 5 verschiedenen nacheinander zu durchlaufenden Schritten:

1. Geometrie: Die Geometrie eines Tragflügelprofils ist als bekannt vorauszusetzen. Die gekrümmte Kontur ist durch lineare Längenelemente – *Panel* – zu approximieren. Jeder Körperpunkt, der zwei Linien miteinander verbindet, ist durch seine x - y -Koordinaten bestimmt. Dadurch lassen sich die sogenannten Kontrollpunkte I , die in der Mitte der Längenelemente liegen, berechnen.

2. Geschwindigkeitskomponenten: Die normale Geschwindigkeitskomponente $v_{ij}^{(n)}$ an einem Kontrollpunkt I infolge einer Quellenverteilung der Einheitsstärke an einem Element J kann durch die Gln. (4.8) und (4.9) bestimmt werden. Die Definitionen der entsprechenden Geschwindigkeiten und Längen sind in Bild 5.2 gegeben.

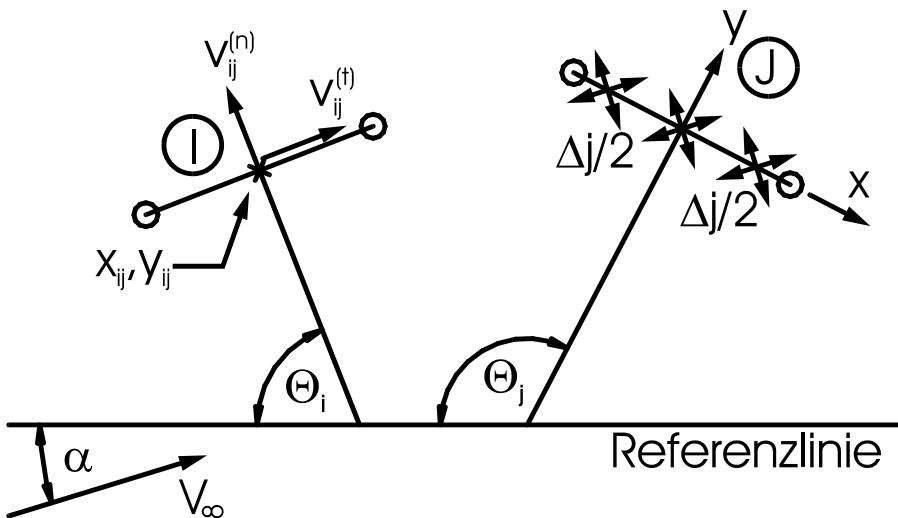


Bild 5.2 Definitionen von Geschwindigkeiten und Längen

Für die Geschwindigkeiten, die durch die Quellenverteilung auf Element J an dem Element I für $i \neq j$ induziert werden, gelten folgende Ansätze, zunächst für die tangentiale Komponente u_{ij} :

$$u_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta j/2}^{+\Delta j/2} \frac{(x_{ij} - x) dx}{(x_{ij} - x)^2 + y_{ij}^2} \quad (5.1)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{\left(x_{ij} + \frac{\Delta j}{2} \right)^2 y_{ij}^2}{\left(x_{ij} - \frac{\Delta j}{2} \right)^2 + y_{ij}^2} \right]$$

und für die normale Komponente v_{ij} :

$$v_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta j/2}^{+\Delta j/2} \frac{y_{ij} dx}{(x_{ij} - x)^2 + y_{ij}^2} \quad (5.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left[\frac{y_{ij} \Delta j}{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 - \left(\frac{\Delta j}{2} \right)^2} \right]$$

Da die Quellen nur an diskreten Stellen verteilt sind und ihre Quellenstärken den Einheitswert besitzen, tauchen diese demzufolge örtlich, also elementweise, in den Geschwindigkeitskomponenten der Gln. (5.1) und (5.2) nicht mehr auf. Aus diesen Geschwindigkeitskomponenten können die Normalgeschwindigkeiten am Element I unter Zuhilfenahme von Bild 5.2 zusammengesetzt werden.

$$v_{ij}^{(m)} = v_{ij} \cos(\theta_j - \theta_i) - u_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (5.3)$$

Die Quelle auf dem Element I beeinflusst nicht nur alle seine benachbarten Elemente, sondern sie induziert auch an ihrem eigenen Ort eine Geschwindigkeit. Gl. (4.11) liefert das Ergebnis für eine Normalgeschwindigkeitskomponente an dem speziellen Element $I = J$ oder $i = j$ eingesetzt in Gl. (5.2).

$$v_{ii}^{(n)} = \frac{1}{2} \quad (5.4)$$

3. Gesamte Normalgeschwindigkeitskomponente: Die gesamte Normalgeschwindigkeitskomponente aufgrund aller Quellenverteilungen entlang aller Elemente mit der Quellenstärke q_j des Elementes J zusammen mit der passenden Komponente der Anströmgeschwindigkeit ist am Punkt I :

$$v_i^{(n)} = \sum_{j \neq i} q_j v_i + \frac{1}{2} q_i - \cos(\alpha + \theta_i) = 0 \quad (5.5)$$

Die korrekte Einhaltung der Randbedingung fordert $v_i^{(n)} = 0$. Mit dieser Bedingung eingesetzt in Gl. (5.5) können die Quellenstärken q_j auf jedem Element bestimmt werden. Ein Satz von linearen Gleichungen entsteht daraus, die simultan gelöst werden müssen.

4. Gesamte Tangentialgeschwindigkeitskomponente: Da nunmehr die Quellenverteilung, welche die Randbedingungen erfüllt, bekannt ist, können die Tangentialgeschwindigkeitskomponente berechnet werden. Die Geschwindigkeit am Kontrollpunkt I infolge des Elementes J ist:

$$v_{ij}^{(t)} = v_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) + u_{ij} \cos(\theta_j - \theta_i) \quad (5.6)$$

Auf dem eigenen Element $I = J$ ist die Selbstbeeinflussung:

$$v_{ii}^{(t)} = 0 \quad (5.7)$$

Die gesamte Tangentialgeschwindigkeit am Punkt I ist:

$$v_i^{(t)} = \sum_{j \neq i} q_j v_{ij}^{(t)} + \sin(\alpha + \theta_i) \quad (5.8)$$

5. Superposition der Tangentialgeschwindigkeiten: Wenn die Berechnung von Gl. (5.8) einmal für den Anstellwinkel $\alpha = 0$ und zum anderen für $\alpha = \pi/2$ durchgeführt wurde, könne alle anderen dazwischen liegenden Anstellwinkel α durch eine adäquate Superposition bestimmt werden.

$$v_i^{(t)} = \cos \alpha \cdot v_{i,\alpha=0}^{(t)} + \sin \alpha \cdot v_{i,\alpha=\pi/2}^{(t)} \quad (5.9)$$

Zieht man die Lösung von Gl. (5.9) vor, so muß nicht immer die kompliziertere Gl. (5.8) berechnet werden.

5.3 Profile mit Auftrieb

Nun werden dieselben Elemente benutzt und zu der bereits vorhandenen Quellenverteilung werden diskrete Wirbel mit Einheitswirbelstärke hinzugefügt. Die freie Anströmung durch die Parallelströmung ist hier allerdings null gesetzt, zumal sie bereits im vorherigen Fall angewendet wurde. Dadurch herrscht reine Zirkulationsströmung vor.

Die Schritte 2 bis 5 des Abschnittes 5.2 werden hier für das Profil mit Auftrieb wiederholt. Nur hier haben die hinzukommenden Geschwindigkeitskomponenten an den Kontrollpunkten ihren Ursprung in den diskreten Wirbelverteilungen und nicht von der Parallelgeschwindigkeit, die hier keinen Einfluß hat, da sie null gesetzt ist.

Die tangentiale Geschwindigkeit $u_{ij}(\text{vortex})$ am Kontrollpunkt I induziert durch die Wirbelverteilung am Element J ist von derselben Form wie die in Gl. (5.2) gegebene.

$$u_{ij}(\text{vortex}) = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left[\frac{y_{ij} \Delta j}{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 - \left(\frac{\Delta j}{2} \right)^2} \right] \quad (5.10)$$

Auf dem eigenen Element $I = J$ ist die Selbstbeeinflussung:

$$u_{ii}(\text{vortex}) = \frac{1}{2} \quad (5.11)$$

Die Normalgeschwindigkeit $v_{ij}(\text{vortex})$ folgt dem Ausdruck in Gl. (5.1):

$$v_{ij}(\text{vortex}) = -\frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{\left(x_{ij} + \frac{\Delta j}{2} \right)^2 + y_{ij}^2}{\left(x_{ij} - \frac{\Delta j}{2} \right)^2 + y_{ij}^2} \right] \quad (5.12)$$

Für $i = j$ folgt:

$$v_{ii}(\text{vortex}) = 0 \quad (5.13)$$

Die Normalkomponente $v_{ij}^{(n)}(\text{vortex})$ wird durch Gl. (5.3) berechenbar.

$$v_{ij}^{(n)}(\text{vortex}) = v_{ij}(\text{vortex}) \cdot \cos(\theta_j - \theta_i) - u_{ij}(\text{vortex}) \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (5.14)$$

Die gesamte Normalgeschwindigkeit $v_i^{(n)}$ am Punkt I gemäß aller Singularitätsverteilungen wird ausgedrückt durch:

$$v_i^{(n)} = \sum_{j \neq i} q_j v_{ij}^{(n)} + \frac{1}{2} q_i + \sum_{j \neq i} v_{ij}^{(n)} (\text{vortex}) = 0 \quad (5.15)$$

Diese Geschwindigkeitskomponente muß wiederum null sein.

Diese Gleichung, die für alle Kontrollpunkte entwickelt wurde, ergibt wiederum einen Satz linearer Gleichungen, für welche die Werte der Quellenstärken q_j für ausschließlich den Fall des Zirkulationseinflusses und keiner Parallelströmung bestimmt werden können. Die Geschwindigkeit $v_{ij}^{(n)}$ in der ersten Summe von Gl. (5.15) besteht aus drei Anteilen, die durch die Gln. (5.1) bis (5.3) gegeben sind.

Die tangentiale Geschwindigkeit $v_{ij}^{(t)}(\text{vortex})$, die durch die Wirbelverteilung induziert wird, berechnet sich durch die Gln. (5.6) und (5.7).

$$v_{ij}^{(t)}(\text{vortex}) = v_{ij}(\text{vortex}) \sin(\theta_j - \theta_i) + u_{ij}(\text{vortex}) \cos(\theta_j - \theta_i) \quad (5.16)$$

Für $i = j$ ergibt sich wiederum:

$$v_{ii}^{(t)}(\text{vortex}) = \frac{1}{2} \quad (5.17)$$

Die gesamte zusammengesetzte tangentiale Geschwindigkeit $v_i^{(t)}$ am Punkt I ist gemäß Gl. (5.7):

$$v_i^{(t)} = \sum_{j \neq i} q_j v_{ij}^{(t)} + \sum_{j \neq i} v_{ij}^{(t)}(\text{vortex}) + \frac{1}{2} \quad (5.18)$$

Die individuellen induzierten Komponenten der Tangentialgeschwindigkeiten $v_{ij}^{(t)}$ im ersten Term von Gl. (5.18) bestehen aus den Anteilen, die in den Gln. (5.1), (5.2) und (5.6) beschrieben sind. Gl. (5.18) beschreibt die benötigte Geschwindigkeitsverteilung um das Profil einzig unter dem Einfluß der Zirkulation mit der Wirbelstärke $\gamma = 1$ und $V_\infty = 0$.

Da die Wirbelstärken entlang eines graden Wegelementes konstant sind, ist die Zirkulation numerisch gesehen gleich der Gesamtlänge aller Längenelemente.

$$S = \oint \gamma ds = \oint ds \quad (5.19)$$

Die Geschwindigkeitsverteilung für jeglichen Anstellwinkel, für jede Anströmgeschwindigkeit und gewünschte Zirkulation kann sodann durch eine passende Superposition der Lösungen nach Gl. (5.8) erzielt werden. Daher folgt für einen Anstellwinkel α mit $V_\infty = 1$ und einer Zirkulation $\Gamma \neq S$ die Geschwindigkeitsverteilung für ein auftriebsbehaftetes Tragflügelprofil:

$$v_i^{(t)} = \cos \alpha v_{i,\alpha=0}^{(t)} + \sin \alpha v_{i,\alpha=\pi/2}^{(t)} + \frac{\Gamma}{S} v_{i,\gamma=1}^{(t)} \quad (5.20)$$

Aus der so berechneten Tangentialgeschwindigkeit läßt sich über die Bernoulli–Gleichung die Druckverteilung ermitteln.

5.4 Bemerkungen zur Panel–Methode

Profile mit einer scharfen Kante am hinteren Staupunkt werden Probleme bei der Lösung verursachen, zumal unendlich große Geschwindigkeiten an diesem Punkt errechnet würden. Eine konforme Abbildung der Profilkontur schafft Abhilfe bei dieser Problematik, weil die Kutta–Bedingung auf die transformierten Profilkonturen angewendet werden kann. Es muß nur ausreichende Zirkulation nach Gl. (5.20) bereitgestellt werden, so daß der Staupunkt am transformierten Profil dem Staupunkt am Originalprofil entspricht. Das kann erfolgen, wenn $v_i^{(t)} = 0$ am Punkt I , der den Staupunkt beschreibt, existiert. Dann wird $\Gamma/S = \gamma$ aus Gl. (5.20) berechnet werden können. Diese Gleichung wird dann aber auch zur Bestimmung der Tangentialgeschwindigkeit benutzt.

Ein anderer einfacherer Ansatz zur Lösung der Lage des hinteren Staupunktes und der Bestimmung von γ ist die Annahme, daß die Geschwindigkeiten unmittelbar in der Nähe des hinteren Staupunktes oberhalb und unterhalb des Profils gleich groß sein müssen.

Für die Berechnung des Druckkoeffizienten c_p dient die Bernoulli–Gleichung in Verbindung mit Gl. (5.20).

$$c_{p_i} = \frac{p_i - p_\infty}{1/2 \rho_\infty V_\infty} = 1 - \left(\frac{v_i^{(t)}}{V_\infty} \right)^2 \quad (5.21)$$

Der Druckkoeffiziente c_{p_i} für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi/2$ wird durch Gl. (5.20) berechnet.

$$\frac{v_i^{(t)}}{V_\infty} = \sqrt{1 - c_{p_i}} \quad (5.22)$$

Durch Superposition werden die beiden Ergebnisse für den Druckkoeffizienten c_{p_i} für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi/2$ kombiniert, wodurch die Tangentialgeschwindigkeit $v_i^{(t)}$ eine Funktion des Anstellwinkels α wird.

$$\frac{v_i^{(t)}(\alpha)}{V_\infty} = \cos \alpha \sqrt{1 - c_{p_{\alpha=0}}} + \sin \alpha \sqrt{1 - c_{p_{\alpha=\pi/2}}} \quad (5.23)$$

Setzt man Gl. (5.23) in Gl. (5.21) ein, wird der Druckkoeffizient auch zur Funktion des Anstellwinkels.

$$c_{p_i}(\alpha) = 1 - \left(\frac{v_i^{(t)}(\alpha)}{V_\infty} \right)^2 \quad (5.24)$$

Einige Hinweise bei der Anwendung der Panel-Methode sind zu beachten:

- Die Anzahl der benötigten Panel für eine ausreichend genaue Lösung liegt für ein Profil ohne Auftrieb bei 60 bis 80 und für ein auftriebsbehaftetes Profil bei mehr als 100 Panel.
- Für eine möglichst hohe Genauigkeit ist es wichtig, bei starken Krümmungsänderungen der Tragflügelprofile, was einer starken Druckänderung entspricht, eine hohe Konzentration von Panel zu besitzen.
- Gleichfalls dürfen benachbarte Panel nicht erheblich unterschiedlich in ihrer Länge sein.

Dreidimensionale Berechnungsverfahren

6 Definitionen zur Tragflügelumströmung

6.1 Grundsätzliche Annahmen

Der grundsätzliche Unterschied zwischen zwei- und dreidimensionalen reibungsfreien und inkompressiblen Strömungen ist:

- Die Strömung ist überall drehungsfrei und kontinuierlich ohne Widerstand.
- Wirbel sind in Nachläufen für auftriebsbehaftete Profile vorhanden und Widerstand wird dadurch im Nachlauf durch die kinetische Energie der Nachlaufwirbel induziert.

Um die klassische finite Traglinientheorie nach Prandtl in Kapitel anwenden zu können, werden die folgenden Annahmen vorgegeben:

- Eine unendlich dünne Wirbelschicht wird an der Hinterkante eines endlichen Tragflügels angebracht, um den Nachlauf hinter dem Tragflügel zu simulieren. Mit Ausnahme dieser Wirbelschicht ist die Strömung drehungsfrei.
- Die Wirbelschicht wird als eben angenommen und nahe am Tragflügel platziert, wo sie die Strömung um den Flügel beeinflussen kann. Somit wird der Flügel mit seinem Nachlauf durch eine Verteilung von *gebundenen Wirbeln* auf der Fläche des Flügels repräsentiert und einer Verteilung von

stromab verlaufenden Wirbelfäden auf und hinter dem Tragflügel. Da nur eine Strömung betrachtet werden darf, die nicht abgelöst ist, kann diese Theorie dünner Tragflügel nicht auf angestellte Deltaflügel, bei denen an der vorderen Kante Ablösung entsteht, angewendet werden.

Das elementare Problem dieser Theorie ist, eine Beziehung zwischen der Tragflügelform und der Verteilung der Wirbel im Nachlauf herzustellen. Ist diese Beziehung gefunden, kann die *Lastverteilung des Flügels* recht gut bestimmt werden.

In der folgenden Entwicklung dieser Traglinientheorie wird die Tragflügeldicke vernachlässigt. Das heißt, daß die Randbedingungen auf einer ebenen Fläche und nicht auf der tatsächlichen Kontur festgelegt werden. Das Vorgehen entspricht dem der *linearisierten Theorie dünner Profile*. Das impliziert, daß Auftriebs- und Dickeneffekte separat voneinander bestimmt und anschließend addiert werden können. Falls erforderlich kann man die Dicken effekte dadurch bestimmen, daß man mit Hilfe einer definierten Quellenverteilung innerhalb des Tragflügels seine Dicke simuliert.

6.2 Geometrische Verhältnisse

Um die Geometrie eines endlich ausgedehnten Tragflügels für die Strömungsberechnung festzulegen, müssen einige Definitionen getroffen werden. In Bild 6.6 und im weiteren wird die x -Achse parallel zur Anströmung gelegt. Die y -Achse liegt in der Symmetrieebene des Flügels und die z -Achse zeigt nach unten, was einem linksdrehenden kartesischen Koordinatensystem entspricht. Die Zirkulation und die Drehung bleiben mit der Rechten Hand Regel verbunden.

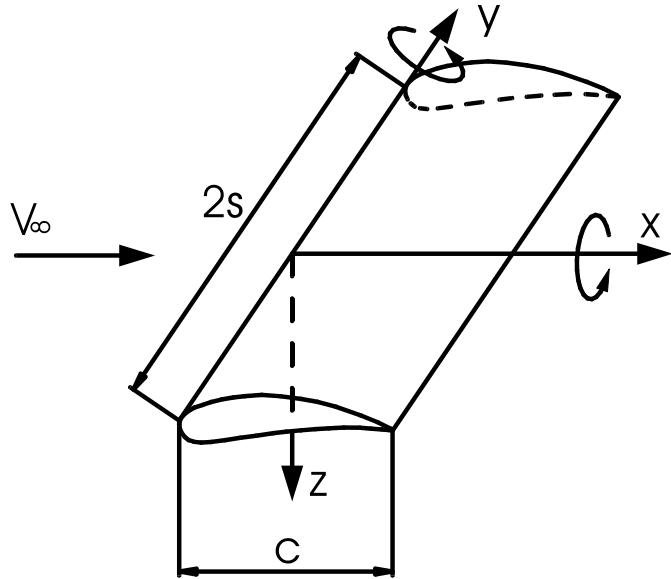


Bild 6.1 Geometrie für einen endlich ausgedehnten Tragflügel

6.3 Wirbel und Wirbelschicht im dreidimensionalen Raum

Nun müssen einige Betrachtungen zu Wirbeln und Wirbelschichten in Bezug auf das *Biot–Savart–Gesetz* gemacht werden. Dieses Gesetz wird nicht angewendet, wenn es sich um rein zweidimensionale Strömungen handelt. Im dreidimensionalen Raum gelten zunächst als Grundlage die sogenannten *Helmholtzschen Wirbelsätze*. Diese besagen:

- Die Wirbelstärke eines Wirbels ist konstant.
- Wirbelfäden enden nicht im Fluid.

Auf diesen Sätzen baut das Biot–Savart–Gesetz auf.

6.3.1 Biot–Savart–Gesetz

Das Gesetz von Biot–Savart beschreibt die induzierte Geschwindigkeit im Strömungsfeld, die an einem beliebigen Ort durch ein isoliertes Element $d\vec{s}$ eines Wirbelfadens hervorgerufen wird.

$$d\vec{v}_i = \frac{\Gamma}{4\pi r^3} (d\vec{s} \times \vec{r}) \quad (6.1)$$

Hierin bedeuten:

- Γ Wirbelstärke eines Elementes $d\vec{s}$
- $d\vec{s}$ Längenvektor eines Elementes
- \vec{r} Abstandsvektor am betrachteten Raumpunkt
- $d\vec{v}_i$ induzierter Geschwindigkeitsvektor

In Bild 6.2 gibt ein Beispiel für die induzierte Geschwindigkeit am Punkt P nach der Integration entlang einem Wirbelfaden mit $\Gamma = \text{konstant}$ von $0 \leq x < \infty$ dargestellt.

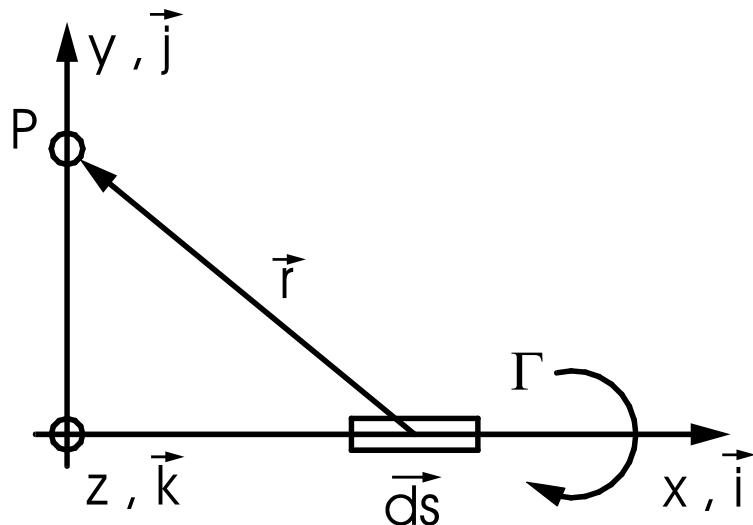


Bild 6.2 Induzierte Geschwindigkeit durch ein Element eines Wirbelfadens

Die zugehörigen geometrischen Verhältnisse sind:

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \vec{i} dx \\ \vec{r} &= \vec{j} y - \vec{i} x \end{aligned} \tag{6.2}$$

Nach Integration wird aus Gl. (6.1):

$$\begin{aligned}
\vec{v}_i &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\vec{i} dx \times \vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\vec{k} y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\Gamma \vec{k}}{4\pi y}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Dazu wurde die folgende Integrationsvorschrift angewendet.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} &= \frac{1}{y^2} \left. \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right|_0^\infty \\
&= \frac{1}{y^2}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Durch Gl. (6.3) wird die Berechnung der induzierten Geschwindigkeit an jedem Punkt im dreidimensionalen Raum möglich.

6.3.2 Wirbelschicht in dreidimensionaler Strömung

Eine Wirbelfläche stellt im allgemeinen eine Fläche innerhalb einer Strömung dar, auf der die Drehung gegen unendlich strebt. Über diese Fläche hinweg findet ein Sprung in der tangentialen Geschwindigkeit statt. Eine Darstellung der induzierten Geschwindigkeiten, hervorgerufen durch eine Wirbelfläche, ist in Bild 6.3 gegeben.

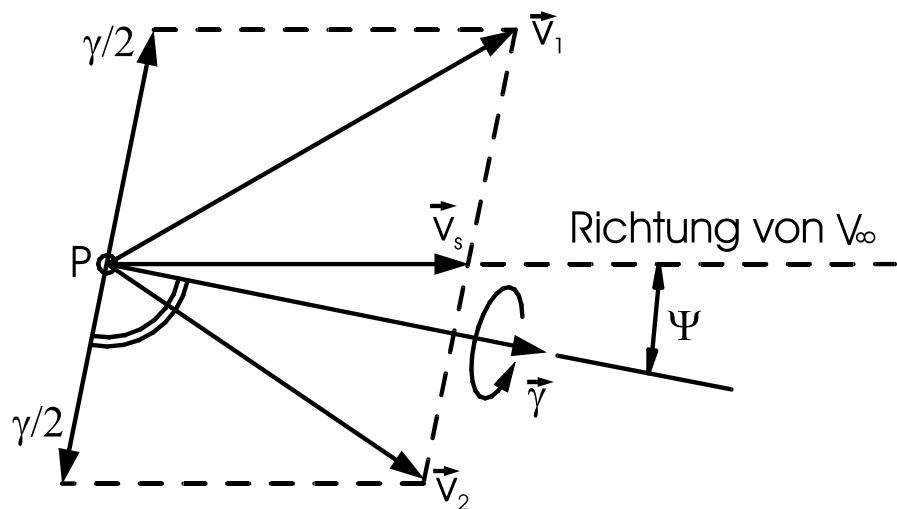


Bild 6.3 Induzierte Geschwindigkeit durch eine Wirbelfläche

Hierin bedeuten:

- \vec{v}_1 und \vec{v}_2 Geschwindigkeiten ober- und unterhalb der Wirbelfläche
- \vec{v}_s mittlere Geschwindigkeit, V_∞ eingeschlossen
- ψ Winkel zwischen \vec{v} und V_∞

Die induzierten Geschwindigkeiten ober- und unterhalb der Fläche sind gleich groß, nur ihre Richtungen sind entgegengesetzt. Der Betrag, also die Größe der gerichteten Wirbelstärke $\bar{\gamma}$, ist $\gamma = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$. Die induzierten Geschwindigkeiten $\pm \gamma/2$ stehen senkrecht zu $\bar{\gamma}$.

Um die Druckdifferenz über die Wirbelfläche hinweg bestimmen zu können, muß die Bernoulli-Gleichung ober- und unterhalb der Fläche angewandt werden und anschließend müssen die berechneten Drücke voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 &= P_1 \\ p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 &= P_2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Somit ist die Druckdifferenz:

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_1 - p_2 \\ &= P_1 - P_2 + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Betrachtet man Bild 6.3, so können diese Schlüsse gezogen werden:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \left(v_s + \frac{\gamma}{2} \sin \psi \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \cos \psi \right)^2 \\ v_2^2 &= \left(v_s - \frac{\gamma}{2} \sin \psi \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \cos \psi \right)^2 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Entsprechend Gl. (6.6) werden diese Gleichungen voneinander subtrahiert.

$$v_2^2 - v_1^2 = -2 \gamma v_s \sin \psi \tag{6.8}$$

Damit kann Gl. (6.6) umgeschrieben werden.

$$\Delta p = \Delta P - \rho v_s \gamma \sin \psi \quad (6.9)$$

Nun lassen sich einige Fallbeispiele durchführen:

1. Beispiel:

Für $\Delta P = 0$ und $\psi = 0$ ergibt sich für Gl. (6.9):

$$\Delta p = 0 \quad (6.10)$$

Das sind die Annahmen, die für die nicht gebundenen Wirbel im Nachlauf gelten. Hier ist also der Druck über die Fläche null. Das ist identisch mit der Kutta–Bedingung, die besagt, daß die Flächenbelastung des Tragflügels an der Hinterkante des Flügels im Nachlauf null sein muß. Dieser Fall ist in Bild 6.4 verdeutlicht.

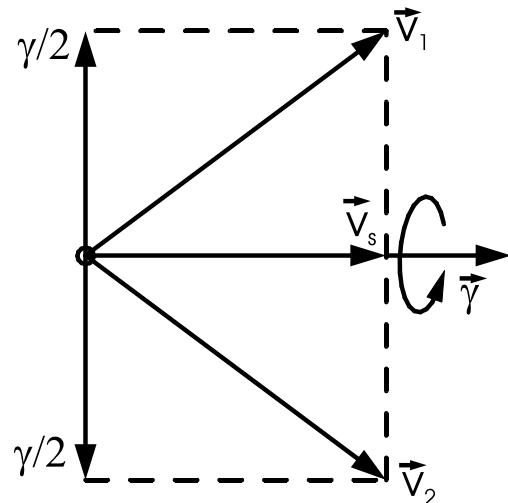


Bild 6.4 Induzierte Geschwindigkeit durch eine Wirbelfläche im Nachlauf

2. Beispiel:

Für eine Fläche mit gebundenen Wirbeln auf der Tragflügelfläche, der ungepfeilt und mit einem großen Streckungsverhältnis versehen ist, sind die Annahmen nach Bild 6.5 $\Delta P = 0$ und $\psi \approx -\pi/2$ und $v_s \approx V_\infty$.

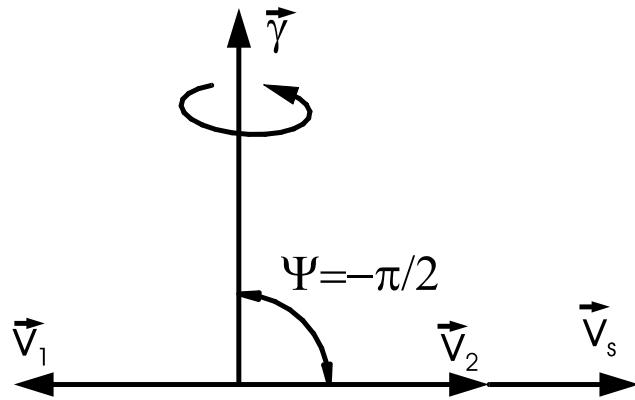


Bild 6.5 Induzierte Geschwindigkeit durch gebundene Wirbelfläche auf dem Tragflügel

Der Drucksprung wird nun nach Gl. (6.6):

$$\Delta p = \rho \gamma V_\infty \quad (6.11)$$

Das Ergebnis in Gl. (6.11) bestätigt das Kutta–Joukowski–Gesetz für die Auftriebskraft.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^c \Delta p \, dx \\ &= \rho V_\infty \Gamma \end{aligned} \quad (6.12)$$

Zudem kann ein Lastfaktor l über den Drucksprung definiert werden.

$$l = \frac{\Delta p}{1/2 \rho V_\infty^2}$$

$$= \frac{\rho \gamma V_\infty}{1/2 \rho V_\infty^2} \quad (6.13)$$

$$= \frac{2 \gamma}{V_\infty}$$

3. Beispiel:

Für einen leicht rückwärts gepfeilten Flügel mit einem großen Streckungsverhältnis sind die Annahmen $\Delta P = 0$ und $v_s \approx V_\infty$, aber $\psi \approx -(\pi/2 - \Lambda)$, worin Λ der Pfeilwinkel ist.

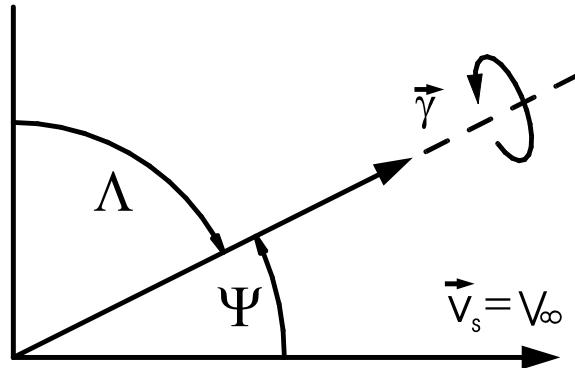


Bild 6.6 Induzierte Geschwindigkeit durch gebundene Wirbelfläche am gepfeilten Tragflügel

In diesem Fall wird aus Gl. (6.9) gemäß Bild 6.6:

$$\Delta p = \rho V_\infty \gamma \cdot \cos \Lambda \quad (6.14)$$

Wie man sieht, wird die Wirbelverteilung in Spannweitenrichtung, welche die gebundenen Wirbel repräsentiert, unabhängig vom Pfeilwinkel Λ , da $\gamma \neq \gamma(\Lambda)$. Also ergibt sich für die lokale Steigung der Auftriebskurve eine direkte Proportionalität zu $\cos \Lambda$.

$$\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} = 2 \pi \cos \Lambda \quad (6.15)$$

Der Lastfaktor nach Gl. (6.13) erhält somit eine allgemeinere Form.

$$l = \frac{2\gamma}{V_\infty} \cos A \quad (6.16)$$

Das schließt die Vorarbeiten in Form von allgemeinen Annahmen und Fallstudien zu den räumlich verteilten Wirbeln in Zusammenhang mit dem Biot–Savart–Gesetz ab. Die Vorbereitungen für Ansätze von dreidimensionalen Methoden zur Berechnung gesamter Tragflügelumströmungen sind getroffen.

7 Traglinientheorie

7.1 Einführung in die Traglinientheorie

In dieser Einleitung werden die Annahmen für die Entwicklung der *Traglinientheorie* zusammengestellt. Dieser Ansatz ist der einfachste in der historischen Entwicklung und wurde von Ludwig Prandtl erstmals eingesetzt. Alle weiteren Entwicklungen basieren auf Prandtls Idee.

Auf einem endlich ausgedehnten Tragflügel ändern sich die Strömungseigenschaften in Spannweitenrichtung, insbesondere die Zirkulation, wie in Bild 7.1 angedeutet.

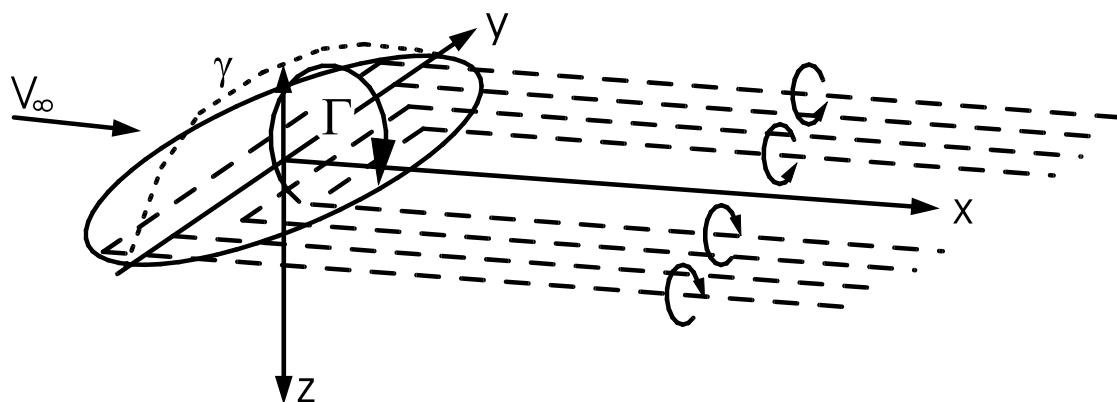


Bild 7.1 Variable Verteilung der Zirkulation in Spannweitenrichtung

Dieser einfache Ansatz der Traglinientheorie verwendet eine Anzahl gebundener Wirbel. Da die Wirbelstärke entlang der Spannweite konstant sein soll, müssen die einzelnen Wirbelfäden in dem Bündel der gebundenen Wirbel von unterschiedlicher Länge sein, um eine

notwendige variable gesamte Wirbelstärke über die Spannweite zu ermöglichen. Um dieses zu erreichen, werden die einzelnen Wirbelfäden um 90° in Stromabrichtung umgebogen, was in einer Wirbelfläche im Nachlauf des Flügels, der nicht gepfeilt und von großem Streckungsverhältnis ist, resultiert.

Es muß angemerkt werden, daß die umgebogenen Wirbel im Nachlauf eine Wirbelfläche bilden, die die Strömungsbedingungen derart über den Flügel beeinflußt, daß eine abwärtsgerichtete Strömung in z -Richtung entsteht, Bild 7.1.

Die Wahl einer solchen Strömungsfeldbeschreibung zieht eine Anzahl von Berechnungsschritten, Annahmen und Einschränkungen nach sich.

7.1.1 Geometrie

Die Lage der y -Achse sollte in der $\frac{1}{4}$ -Profiltiefe des Flügels liegen. Der Flügel und die Nachlaufwirbelfläche liegen in der Ebene $z = 0$.

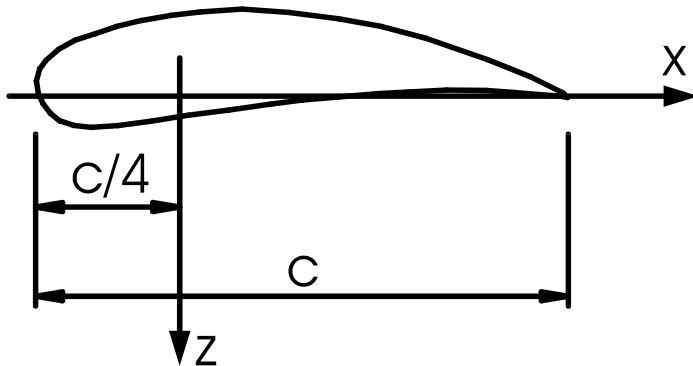


Bild 7.2 Geometrische Verhältnisse am Tragflügel

In Bild 7.2 ist die Lage der $\frac{1}{4}$ -Profiltiefe definiert.

7.1.2 Strömungsablenkwinkel

Es wird angenommen, daß jeder Abschnitt des Flügels, also jedes Profil unabhängig von den benachbarten sei. Der *Strömungsablenkwinkel* ist von der gesamten Wirbelfläche abhängig. Er wird in y -Richtung mit Hilfe einer fundamentalen Gleichung für diese Traglidentheorie, die später entwickelt wird, berechnet.

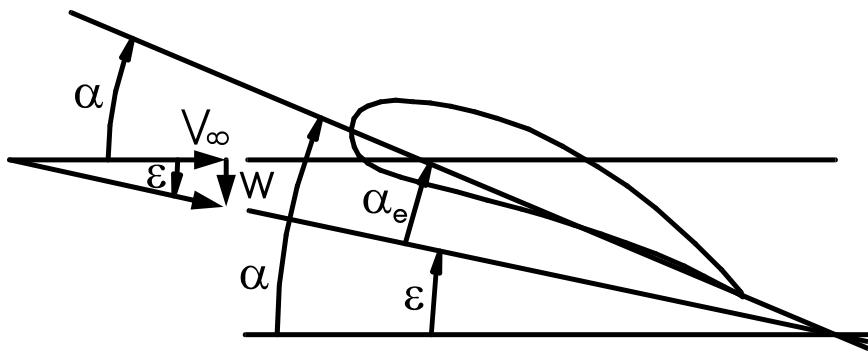


Bild 7.3 Definition des Strömungsablenkwinkels

Gemäß Bild 7.3 wird der *aerodynamische* oder *effektive Anstellwinkel* für jeden Abschnitt in Spannweitenrichtung bestimmt durch:

$$\alpha_e(y) = \alpha - \varepsilon(y) \quad (7.1)$$

Hierin bedeuten:

- α_e effektiver oder aerodynamische Anstellwinkel
- α geometrischer Anstellwinkel
- ε lokaler Strömungsablenkwinkel

Nach Bild 7.3 ist der lokale Strömungsablenkwinkel, der gewöhnlich recht klein ist:

$$\varepsilon \approx \tan \varepsilon = \frac{w}{V_\infty} \quad (7.2)$$

Aus Gl. (7.2) erklärt sich auch der im englischen Sprachgebrauch übliche Name für diesen Winkel, nämlich *downwash angle*. Er ist durch die Geschwindigkeitskomponenten ausdrückbar.

7.1.3 Zirkulation

Von dem Kutta–Joukowski–Gesetz wird erwartet, daß es an jeder Spannweitenposition gültig ist und daß damit für die Auftriebskraft pro Einheitsspannweite gilt:

$$A(y) = \rho V_\infty \Gamma(y) \quad (7.3)$$

$\Gamma(y)$ ist die lokale Zirkulation. Als weitere vereinfachte Annahme für den lokalen Auftriebsbeiwert folgt:

$$c_a(y) = a_o \alpha_e(y) \quad (7.4)$$

Die Steigung dieses linearen Ansatzes ist $a_0 \leq 2\pi$, was ebenfalls durch das Experiment bestätigt wird.

Aus Gl. (7.3) kann die lokale Zirkulation mit der Definition des lokalen Auftriebsbeiwertes nach Gl. (7.4) ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \Gamma(y) &= \frac{A(y)}{\rho V_\infty} \\ &= \frac{c_a(y) c(y) \cdot 1/2 \rho V_\infty^2}{\rho V_\infty} \\ &= 1/2 a_o V_\infty c(y) \cdot \alpha_e(y) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Hierin bedeutet $c(y)$ die variable Profilsehne in Spannweite.

7.1.4 Gesamtauftriebsbeiwert

Der Gesamtauftriebsbeiwert für den Tragflügel ist:

$$C_a = \frac{1}{2 S \bar{c}} \int_{-S}^{+S} c(y) c_a(y) dy \quad (7.6)$$

In Gl. (7.6) ist S die halbe Spannweite des Flügel und \bar{c} die darüber gemittelte Profilsehne.
Nutzt man die Definition des Auftriebsbeiwertes c_a ,

$$\begin{aligned} c_a(y) &= \frac{A(y)}{1/2 \rho V_\infty c(y)} \\ &= \frac{\rho V_\infty \Gamma(y)}{1/2 \rho V_\infty^2 c(y)} \\ &= \frac{2 \Gamma(c)}{V_\infty c(y)} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Damit kann Gl. (7.6) umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned}
C_a &= \frac{1}{S \bar{c} V_\infty} \int_{-S}^{+S} \Gamma(y) dy \\
&= \frac{1}{\bar{c} V_\infty} \int_{-1}^{+1} \Gamma(y/S) d\left(\frac{y}{S}\right)
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Durch die Kenntnis aller lokalen Zirkulationen in Spannweitenrichtung wird der Gesamtauftriebsbeiwert berechenbar.

7.1.5 Induzierter Widerstand

Die Auftriebskraft wird definitionsgemäß als senkrecht zur ungestörten Anströmung V_∞ angenommen. Wegen des Strömungsablenkungswinkels ε entsteht eine auftriebsinduzierte Komponente der Widerstandskraft W_i . Bild 7.4 zeigt das geometrisch anschaulich.

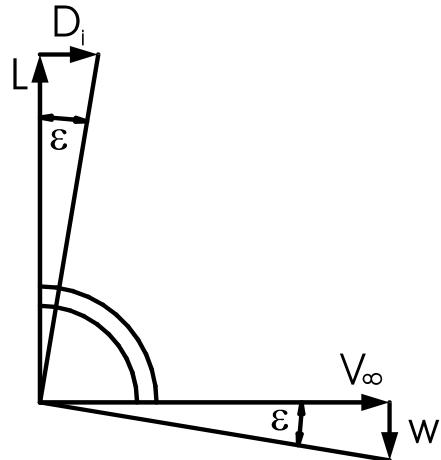


Bild 7.4 Definition des auftriebsinduzierten Widerstandes

Damit ergibt sich für den lokalen induzierten Widerstandsbeiwert c_{wi} :

$$c_{wi}(y) = c_a(y) \varepsilon(y) \tag{7.9}$$

Nach Integration von Gl. (7.9) kann der gesamte induzierte Widerstandsbeiwert C_{wi} ermittelt werden.

$$C_{wi} = \frac{1}{2S\bar{c}} \int_{-S}^{+S} c(y) c_w(y) \varepsilon(y) dy \tag{7.10}$$

In dimensionsloser Form schreibt sich Gl. (7.10):

$$C_{wi} = \frac{1}{\bar{c} V_\infty} \int_{-1}^{+1} \Gamma \left(\frac{y}{S} \right) \varepsilon \left(\frac{y}{S} \right) d \left(\frac{y}{S} \right) \quad (7.11)$$

7.2 Fundamentale Gleichung von Prandtl

Die Variation der Zirkulation in Spannweitenrichtung ist in Bild 7.5 wiedergegeben.

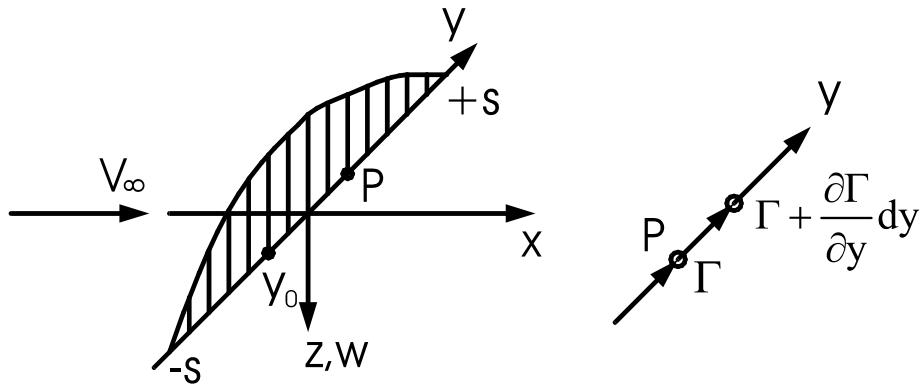


Bild 7.5 Variable Zirkulation durch eine Wirbelfläche im Nachlauf

An der Flügelspitze muß die Zirkulation sinnvollerweise zu null werden. Die Strömungsabwärtsbewegung entlang der y -Achse an der Position $y = y_0$, die durch die Wirbelfläche im Nachlauf erzeugt wird, ist auf das Gesetz von Biot–Savart zurückzuführen.

$$dw = -\frac{1}{4\pi(y - y_0)} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} dy \quad (7.12)$$

Die gesamte Komponente der Strömung w in z -Richtung, verursacht durch alle Wirbel an der Stelle $y = y_0$, wird durch Integration von Gl. (7.12) in Spannweitenrichtung berechnet. Demzufolge wird der lokale Strömungsablenkwinkel $\varepsilon(y_0)$ an der Position $y = y_0$ nach Gl. (7.2):

$$\varepsilon(y_0) = -\frac{1}{4\pi V_\infty} P \int_{-S}^{+S} \frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial y}}{(y - y_0)} dy \quad (7.13)$$

Darin bedeutet P der Hauptwert des Integrals. Setzt man Gl. (7.5) in Gl. (7.1) ein, so ergibt sich eine andere Aussage für den Winkel $\varepsilon(y_0)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(y_o) &= \alpha - \alpha_e(y_o) \\ &= \alpha - \frac{2 \Gamma(y_o)}{a_o V_\infty c(y_o)}\end{aligned}\tag{7.14}$$

Die beiden Gln. (7.13) und (7.14) können dann gleichgesetzt werden. Nach Auflösen dieser Gleichung nach der Zirkulation $\Gamma(y_0)$ an der Stelle $y = y_0$ ergibt die fundamentale Gleichung nach Prandtl für die Traglinientheorie.

$$\Gamma(y_o) = \frac{a_o(y_o)}{2} \left[V_\infty \alpha + \frac{1}{4\pi} \int_{-S}^{+S} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} (y - y_o) dy \right] \tag{7.15}$$

Gl. (7.15) ist eine singuläre, lineare *Integro-Differentialgleichung* für $\Gamma(y_0)$, die mit Hilfe der folgenden Randbedingungen gelöst werden kann.

$$\Gamma(-S) = \Gamma(+S) = 0 \tag{7.16}$$

Um Gl. (7.15) leichter lösen zu können, wird gewöhnlich ein trigonometrischer Ansatz gewählt.

$$y = S \cos \theta \tag{7.17}$$

Die Zirkulation Γ kann durch eine *Fourier-Reihe* ersetzt werden.

$$\Gamma = 4 V_\infty S \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n \theta) \tag{7.18}$$

Dieser Ansatz erfüllt automatisch die in Gl. (7.16) geforderten Randbedingungen. Damit kann eine leichter lösbar Form der fundamentalen Gleichung für die Zirkulationsverteilung erzielt werden. Durch Einsetzen der Gln. (7.17) und (7.18) in Gl. (7.15) führt zu:

$$\Gamma(\theta_o) = \frac{1}{2} a_o \bar{c} V_\infty \left(\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n B_n \cos(n \theta)}{(\cos \theta - \cos \theta_o)} d\theta \right) \tag{7.19}$$

Die Reihenfolge der Integration und der Summenbildung in Gl. (7.19) kann vertauscht werden. Jedes Integral enthält die Form des *Integrals nach Glauert*, so daß dessen Lösung die Form hat:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\phi)}{(\cos\phi - \cos\phi')} d\phi = \pi \frac{\sin(n\phi')}{\sin\phi'} \quad (7.20)$$

Da nunmehr der Lösungsweg für die Gleichung nach Prandtl für die Traglinientheorie vorgegeben ist, können besondere Formen der Tragflügelfläche in Zusammenhang mit einer sinnvollen Zirkulationsverteilung gebracht werden.

7.3 Elliptischer Tragflügel

Um Ergebnisse für eine Verteilung der Zirkulation auch für elliptisch Tragflügel, deren Form in der Draufsicht einer Ellipse entspricht, zu erzielen, müssen zunächst einige allgemeine Ergebnisse bereitgestellt werden. Dazu wird in Gl. (7.8) für den Gesamtauftriebsbeiwert die Zirkulation Γ durch Gl. (7.18) ersetzt.

$$C_a = 2A \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta) \sin\theta d\theta \quad (7.21)$$

Die Größe A stellt das Streckungsverhältnis dar.

$$A = \frac{2S}{c} \quad (7.22)$$

Das Ergebnis von Gl. (7.21) für $n = 1$ ist:

$$C_a = \pi \cdot A \cdot B_1 \quad (7.23)$$

Der auftriebsinduzierte Gesamtwiderstandsbeiwert C_{wi} nach Gl. (7.10) ist nun auch berechenbar. Dazu wird Gl. (7.14) für den Strömungsablenkungswinkel ε und Gl. (7.5) für die Zirkulation Γ , mit der der aerodynamische Anstellwinkel eliminiert wird, gewählt. Zudem dient der Fourier-Ansatz für die Zirkulation nach Gl. (7.18), um den auftriebsinduzierten Gesamtwiderstandsbeiwert C_{wi} zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
C_{wi} &= \frac{1}{\bar{c} V_\infty} \int_0^\pi \Gamma \varepsilon \sin \theta d\theta \\
&= 2A \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta) \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin(n\theta) d\theta \quad (7.24) \\
&= 2A \int_0^\pi \left(B_1^2 \sin^2 \theta + 2B_2^2 \sin^2(2\theta) + \dots \right) d\theta
\end{aligned}$$

Alle Terme, die unterschiedlich von denen sind, die in der letzten Zeile von Gl. (7.24) stehen, liefern einen Nullbeitrag bei der Lösung des Integrals. Damit ergibt sich für das verbleibende Integral:

$$\begin{aligned}
C_{wi} &= \pi A \sum_{n=1}^{\infty} n B_n^2 \\
&= \pi A \left(B_1^2 + 2B_2^2 + 3B_3^2 + 4B_4^2 + \dots \right) \quad (7.25)
\end{aligned}$$

Entsprechend der Auftriebsbeiwertkurve, Gl. (7.23), existiert eine Auftriebskraft, wenn nur $B_1 \neq 0$. Daraus lässt sich folgern, daß für $n = 1$ der Widerstandsbeiwert nach Gl. (7.25) ein Minimum für ein gegebenes C_a ist, wenn $B_1 \neq 0$.

Für die Zirkulation Γ nach Gl.(7.18) mit $n = 1$ wird der Strömungsablenkwinkel ε gemäß Gl. (7.13) konstant entlang der Flügelspannweite.

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} = B_1 \quad (7.26)$$

Mit Gl. (7.23) wird daraus:

$$\varepsilon = B_1 = \frac{C_a}{\pi A} \quad (7.27)$$

Das Minimum des auftriebsinduzierten Widerstandsbeiwertes erhält somit den Wert:

$$C_{wi} = \pi A B_1^2 = \frac{C_a^2}{\pi A} \quad (7.28)$$

Der Vollständigkeit halber wird dieser Koeffizient modifiziert, indem der sogenannte *induzierte Widerstands faktor* k in die Gleichung eingeführt wird. Damit wird Gl. (7.28) auch

für allgemeinere Fälle gültig. Der Faktor k ist konstant für eine gegebene Auftriebsverteilung und ist unabhängig vom Anstellwinkel α .

$$C_{wi} = k \frac{C_a^2}{\pi A} \quad (7.29)$$

Die Zirkulation Γ nach Gl.(7.18) mit $n = 1$ ist:

$$\Gamma = 4 V_\infty S B_1 \sin \theta \quad (7.30)$$

Mit Hilfe von Gl. (7.7) läßt sich eine *spannweite Lastverteilung* definieren:

$$\begin{aligned} c(y) \cdot c_a(y) &= \frac{2 \Gamma}{V_\infty} \\ &= \frac{4}{\pi} \bar{c} C_a \cdot \sin \theta \\ &= \frac{4}{\pi} \bar{c} C_a \sqrt{1 - \left(\frac{y}{S}\right)^2} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Diese Gleichung kann dergestalt umgeschrieben werden, daß ihre elliptische Form gezeigt werden kann. Sie hat ein Maximum bei $y = 0$.

$$\frac{(c(y)c_a(y))^2}{\left(\frac{4}{\pi} \bar{c} C_a\right)^2} + \frac{y^2}{S^2} = 1 \quad (7.32)$$

Wenn der Flügel nicht verwunden ist, was hier angenommen wird, so ist der geometrische Anstellwinkel α konstant. Da, wie bereits nach Gl. (7.27) festgestellt, der Strömungsablenkwinkel ε auch konstant ist, muß der aerodynamische Anstellwinkel α_e ebenfalls entlang der gesamten Spannweite nach Gl. (7.1) gleich groß bleiben.

Gl. (7.4) folgend ist der lokale Auftriebsbeiwert c_a auch konstant. Demzufolge bleibt nur übrig, daß die Profilsehnen entlang der Spannweite variabel bleiben müssen, wenn nach Gl. (7.23) der Gesamtauftriebsbeiwert konstant bleibt. Die spannweite Profilsehnenverteilung ändert sich elliptisch. Deshalb werden derartige *Tragflügelkonturen elliptische Tragflügel* genannt.

Im Anschluß werden einige Referenzformeln für den elliptischen Flügel zusammengestellt. Zunächst werden die Steigung der Auftriebskurve und der Auftrieb für einen unendlichen Flügel, für welchen die Streckung A unendlich ist, gegeben.

$$A = \frac{2S}{\bar{c}} \quad (7.33)$$

Die Größe S ist die Fläche des Tragflügels in der Draufsicht und \bar{c} ist die über alle lokalen Profilsehnen gemittelte Profilsehne des Tragflügels.

Die Steigung der Auftriebskurve für $A \rightarrow \infty$ ist:

$$\frac{dC_a}{d\alpha} = a_0 \leq 2\pi \quad (7.34)$$

Der Auftrieb für $A \rightarrow \infty$ ist:

$$C_a = a_0 (\alpha - \alpha_0) \quad (7.35)$$

Hierin ist α_0 der Anstellwinkel bei Nullauftrieb.

Für den endlichen, elliptischen Flügel wird der auftriebsinduzierte Widerstand:

$$C_{wi} = \frac{C_a}{\pi A} \quad (7.36)$$

Der Strömungsablenkwinkel ε dazu ist:

$$\varepsilon = \frac{C_a}{\pi A} \quad (7.37)$$

Für den effektiven oder aerodynamischen Anstellwinkel folgt:

$$\alpha_e = \alpha - \varepsilon = \alpha - \frac{C_a}{\pi A} \quad (7.38)$$

Der Gesamtauftriebsbeiwert ist:

$$\begin{aligned} C_a &= a_0 (\alpha_e - \alpha_0) \\ &= a_0 ((\alpha - \alpha_0) - \varepsilon) \end{aligned} \quad (7.39)$$

Mit der Steigung der Auftriebskurve $a_0 = 2\pi$ lassen sich die folgenden Verhältnisse zusammenstellen.

$$C_a = \frac{a_0 (\alpha - \alpha_0)}{1 + \frac{a_0}{\pi A}} \quad (7.40)$$

$$= \frac{2 \pi (\alpha - \alpha_0)}{1 + \frac{2}{A}}$$

$$\frac{d C_a}{d \alpha} = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi A}} \quad (7.41)$$

$$= \frac{2 \pi}{1 + \frac{2}{A}}$$

$$\frac{d C_a / d \alpha}{d C_a / d \alpha|_{(A \rightarrow \infty)}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{A}} \quad (7.42)$$

$$= \frac{A}{a + 2}$$

7.4 Allgemeine Tragflügelkonturen

Zunächst werden einige Gedanken und wesentliche Formeln zur Traglinientheorie zusammengefaßt vorgetragen. Der effektive oder aerodynamische Anstellwinkel ist:

$$\alpha_e = \alpha - \varepsilon \quad (7.43)$$

Mit der Definition für die Auftriebskraft:

$$A = c_a \cdot c \cdot \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \\ = \rho V_\infty \Gamma$$
(7.44)

mit $c_a = a_0 \alpha_e$ wird der aerodynamische Anstellwinkel:

$$\alpha_e = \frac{2 \Gamma}{a_0 c V_\infty}$$
(7.45)

Einsetzen von Gl. (7.45) in Gl. (7.43) ergibt:

$$\Gamma = \frac{c a_0 V_\infty}{2} [\alpha - \varepsilon]$$
(7.46)

In dieser Gleichung ist der Strömungsablenkwinkel:

$$\varepsilon = -\frac{1}{4 \pi V_\infty} \int_{-S}^{+S} \frac{d \Gamma / d y}{(y - y_0)} d y$$
(7.47)

Dieser eingesetzt in Gl. (7.46) liefert Prandtl's fundamentale Gleichung.

$$\Gamma = \frac{c a_0 V_\infty}{2} \left[\alpha + \frac{1}{4 \pi V_\infty} \int_{-S}^{+S} \frac{d \Gamma / d y}{(y - y_0)} d y \right]$$
(7.48)

Diese Hauptgleichung der Traglinientheorie kann durch Einführen der folgenden Ansätze für die Transformation in Spannweitenrichtung y und dem Reihenansatz für die Zirkulation Γ zu einer Lösung geführt werden:

$$y = S \cos \theta$$
(7.49)

$$\Gamma = 4 V_\infty S \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n \theta)$$
(7.50)

Der Differentialquotient von Γ in Gl. (7.48) lautet mit dem Reihenansatz nach Gl. (7.50):

$$\begin{aligned} \frac{d \Gamma}{d y} &= \frac{d \Gamma}{d \theta} \frac{d \theta}{d y} \\ &= 4 V_\infty S \sum_{n=1}^{\infty} B_n n \cos(n \theta) \frac{d \theta}{d y} \end{aligned}$$
(7.51)

Damit ändert sich Gl. (7.48) folgendermaßen:

$$\Gamma = \frac{c a_0 V_\infty}{2} \left[\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \int_{-\pi}^0 \frac{\cos(n\theta)}{(\cos\theta - \cos\theta_0)} d\theta \right] \quad (7.52)$$

Glauerts Integral, Gl. (7.20), führt diese Gleichung einer Lösung zu.

$$\Gamma = \frac{c a_0 V_\infty}{2} \left[\alpha - \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} \right] \quad (7.53)$$

Die Kombination der Gln. (7.53) und (7.50) liefert für eine bestimmte Anzahl m der Koeffizienten B_n einige Ausdrücke für diese unbekannten Koeffizienten.

$$\sum_{n=1}^m B_n \sin(n\theta) = \frac{c a_0}{8S} \left[\alpha - \sum_{n=1}^m n B_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} \right] \quad (7.54)$$

Anders zusammengefaßt, wobei der Index j eine numerische Erfassung dieser Gleichung ermöglicht, wird daraus:

$$\sum_{n=1}^m B_n \sin(n\theta_j) \left[\frac{8S}{ca_0} + \frac{n}{\sin\theta_j} \right] = \alpha_j \quad (7.55)$$

In abgekürzter Form wird aus Gl. (7.55):

$$\sum_{n=1}^m B_n K_{j,n} = \alpha_j \quad (7.56)$$

Gl. (7.56) entwickelt in m spannweitigen Positionen θ_j für $j = 1, m$ einen Satz von m linearen algebraischen Gleichungen für B_n .

$$\begin{aligned} B_1 K_{1,1} + B_2 K_{1,2} + \dots + B_m K_{1,m} &= \alpha_1 \\ B_1 K_{2,1} + B_2 K_{2,2} + \dots + B_m K_{2,m} &= \alpha_2 \\ \cdot &\quad \cdot & \cdot &\quad \cdot \\ \cdot &\quad \cdot & \cdot &\quad \cdot \\ \cdot &\quad \cdot & \cdot &\quad \cdot \\ B_1 K_{m,1} + B_2 K_{m,2} + \dots + B_m K_{m,m} &= \alpha_m \end{aligned} \quad (7.57)$$

Wenn die Koeffizienten B_n für $n = 1, m$ bestimmt sind, ist die Zirkulation an jedem spannweiten Platz bekannt und damit die Lastverteilung

$$c_a \ c = \frac{2 \Gamma}{V_\infty} \quad (7.58)$$

und der lokale Auftriebsbeiwert in dieser Richtung.

$$c_a = \frac{2 \Gamma}{V_\infty \cdot c} \quad (7.59)$$

Falls die spannweite Lastverteilung symmetrisch ist, sind die gradzahligen Koeffizienten B_2, B_4, \dots, B_m null. Dann können die ungraden Koeffizienten B_1, B_3, \dots, B_{m-1} so bestimmt werden, daß Gl. (7.55) an den folgenden Stellen erfüllt ist.

$$\theta_j = \frac{j \pi}{2m} \quad (7.60)$$

$j = 1, 2, \dots, m$

Nutzt man diese Vorgaben, so können für das Beispiel eines rechteckigen nicht verwundenen Tragflügels mit den folgenden geometrischen Randbedingungen Lösungen für die aerodynamischen Größen des Tragflügels gewonnen werden.

$$c = 1 \text{ m}$$

$$S = 5 \text{ m}$$

$$A = \frac{2 S}{c} = 10 \quad (7.61)$$

$$\alpha_0 = 5,7 / \text{Radian}$$

$$\alpha = 5^\circ$$

Gl. (7.55) wird an $m = 4$ spannweitigen Positionen θ_j für $j = 1 \text{ bis } 4$ gemäß Gl. (7.60) erfüllt.

$$\theta_j = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2} \quad (7.62)$$

Die Zirkulation ist:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\theta_j) &= 4V_\infty S \sum_{n=1}^4 B_{2n-1} \sin(2n-1)\theta_j \\
&= \frac{c a_0 V_\infty}{2} \left[\alpha - \sum_{n=1}^4 B_{2n-1} (2n-1) \frac{\sin(2n-1)\theta_j}{\sin \theta_j} \right]
\end{aligned} \tag{7.63}$$

Der darüber entstehende Satz von linearen algebraischen Gleichungen lautet:

$$\sum_{n=1}^4 B_{2n-1} \sin(2n-1)\theta_j \left[\frac{8S}{ca_0} + \frac{(2n-1)}{\sin \theta_j} \right] = \alpha \tag{7.64}$$

Löst man dieses System, so führt das zu den Koeffizienten:

$$B_1 = 0.01291$$

$$B_3 = 0.00200$$

$$B_5 = 0.00052$$

$$B_7 = 0.00010$$

Der lokale Auftriebsbeiwert wird:

$$\begin{aligned}
c_a &= \frac{2 \Gamma}{V_\infty c} \\
&= 8 \frac{S}{c} \sum_{n=1}^4 B_{2n-1} \sin(2n-1)\theta_j \\
&= 0,516 \sin \theta + 0,084 \sin(3\theta) + 0,020 \sin(5\theta) + 0,004 \sin(7\theta)
\end{aligned} \tag{7.65}$$

Der Gesamtauftriebsbeiwert für den Flügel mit einem Anstellwinkel von $\alpha = 5^\circ$ ist:

$$C_a = \pi A B_1 = 0,406 \tag{7.66}$$

Die Steigung der Auftriebskurve ist:

$$\frac{\partial C_a}{\partial \alpha} = a = \frac{C_a}{\alpha} = 4,65 / \text{Radian} \tag{7.67}$$

Der induzierte Widerstand des Tragflügels lautet:

$$C_{wi} = \pi A \sum_{n=1}^4 n B_n^2 = 0,00575 \quad (7.68)$$

Vergleichsweise dazu ist der minimale induzierte Widerstand für den elliptischen Tragflügel:

$$C_{wi\text{ elliptisch}} = \frac{C_a^2}{\pi} = \pi A B_1^2 = 0,00524 \quad (7.69)$$

Daraus ergibt sich der induzierte Widerstandsfaktor:

$$k = \frac{C_{wi}}{C_{wi\text{ elliptisch}}} = 1,097 \quad (7.70)$$

In Bild 7.6 ist der resultierende Auftriebsbeiwert in Spannweitenrichtung dargestellt, der mit einer Approximation erster Ordnung und den Resultaten für einen elliptischen Flügel dergleichen gemittelten Profilsehne für den Tragflügel verglichen wird.

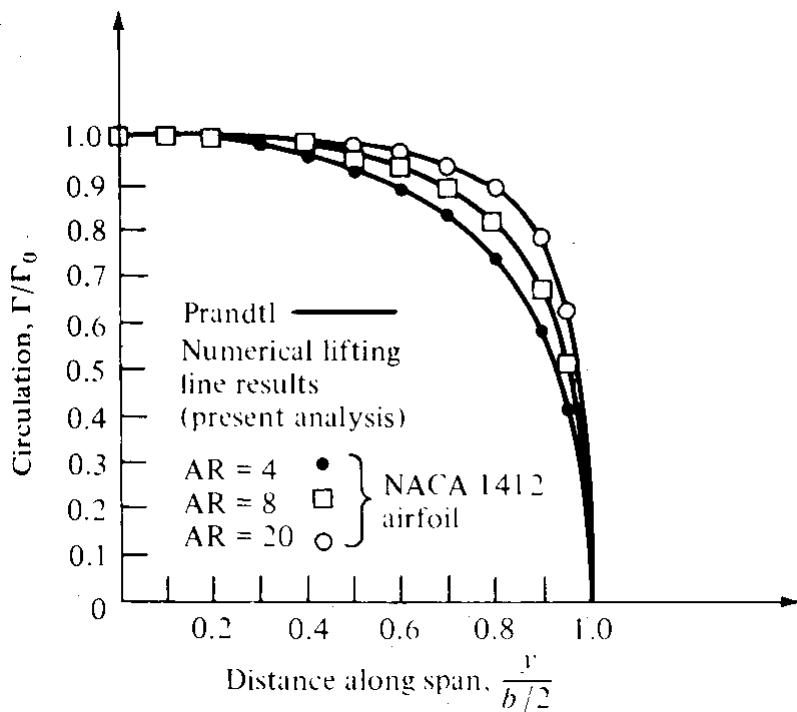


Bild 7.6 Ergebnisse der Traglinientheorie nach Prandtl der spannweitigen Lastverteilung für den unverwundenen rechteckigen Tragflügel.

8 Tragflächentheorie

8.1 Einführung in die Tragflächentheorie

Prandtl's Traglinientheorie liefert sehr gute Ergebnisse für den Auftrieb, den Widerstand und das Rollmoment und zwar für gerade Tragflügel mit Streckungsverhältnissen von $A > 3$. Für kleinere und kleinste Streckungsverhältnisse, gepfeilte Flügel und Deltaflügel gelingt dieses nicht mehr. Beispiele solcher Tragflächenkonturen sind in Bild 8.1 festgehalten.

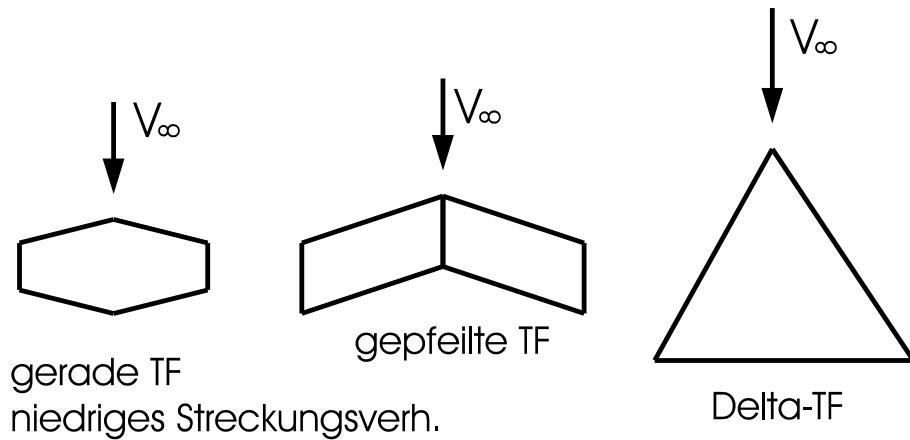


Bild 8.1 Beispiele von Tragflügelkonturen (Traglinientheorie nicht anwendbar)

Für derartige Konturen ist eine wesentlich weiter entwickelte Methode anzuwenden. Die einzelnen AuftriebsWirbellinien in Spannweitenrichtung der Stärke $\Gamma(y)$ der klassischen Traglinientheorie werden durch AuftriebsWirbelflächen der Stärke $\gamma(x,y)$ pro Einheitslänge in Profilsehnenrichtung ersetzt. Diese Wirbel sind in der Spannweitenrichtung gemäß der y -Richtung ausgerichtet. Diese Wirbelfläche ist an eine Wirbelfläche der Stärke $\delta(x,y)$ pro

Einheitslänge in der Spannweitenrichtung angebunden. Bild 8.2 zeigt diesen Zusammenhang der einzelnen Wirbel und Wirbelflächen.

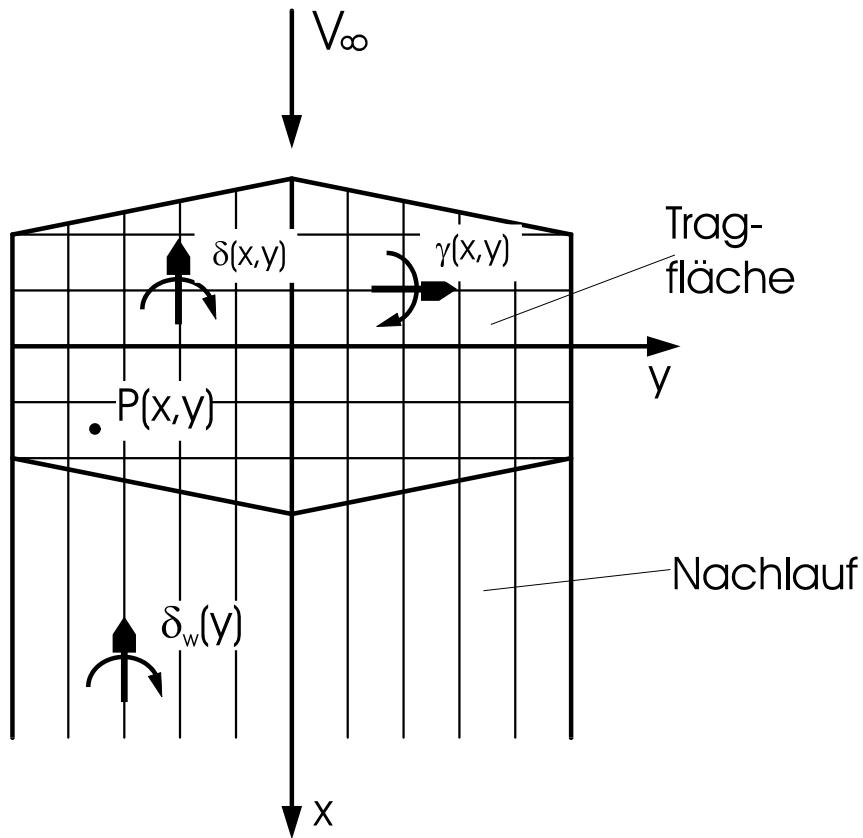


Bild 8.2 Aufbau und Zusammenhang der Wirbelflächen nach der Tragflächentheorie

Also befinden sich in der Tragflächentheorie auf der Oberfläche des Tragflügels:

- eine Auftriebswirbelfläche der Stärke $\gamma(x,y)$, wobei die Wirbel normal zur Anströmung ausgerichtet sind, und
- eine Nachlaufwirbelfläche der Stärke $\delta_w(y)$, wobei hier die Wirbel parallel zur Anströmung ausgerichtet sind.

Die Stärke der jeweiligen Wirbelflächen sind streng aneinander gekoppelt, weil die tangentialen Geschwindigkeiten, die durch die Wirbelflächen nahe der Flügeloberflächen induziert werden, die Bedingung der Drehungsfreiheit erfüllen müssen. Diese Bedingung lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8.1)$$

Hierin sind die Geschwindigkeitskomponenten u in x -Richtung und v in y -Richtung an der Oberfläche gemäß Abschnitt 4.2 und Gl. (4.13):

$$u = \pm \frac{1}{2} \gamma \quad (8.2)$$

$$v = \pm \frac{1}{2} \delta$$

Setzt man die Bedingungen der Gl. (8.2) in Gl. (8.1) ein, so ergibt sich für die Beziehung der Stärken der Wirbelflächen:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (8.3)$$

Stromab von der Flügelhinterkante ist die Stärke der Auftriebswirbelfläche $\gamma(x,y)$ gleich null. Da jede Änderung der Stärke $\delta(x,y)$ der Nachlaufwirbelfläche im Nachlauf null sein muß – $\partial \delta_w / \partial x = 0$ –, wird der Wert der Stärke $\delta_w = \delta_w(y)$ an der Hinterkante unverändert in dem gesamten Nachlaufgebiet erhalten bleiben, wie das in Bild 8.2 dargestellt ist.

Diese Wirbelflächen $\gamma(x,y)$, $\delta(x,y)$ und $\delta_w(y)$ sind in Analogie zur linearisierten Theorie dünner Profile aus Kapitel 4 an die Form des Tragflügels gebunden. An jedem Punkt P auf der Profiloberfläche des Flügels induzieren die Wirbelflächen Geschwindigkeitskomponenten $w(x,y)$ normal zur Ebene des Flügels in z -Richtung, wie es in Bild 8.3 beschrieben ist.

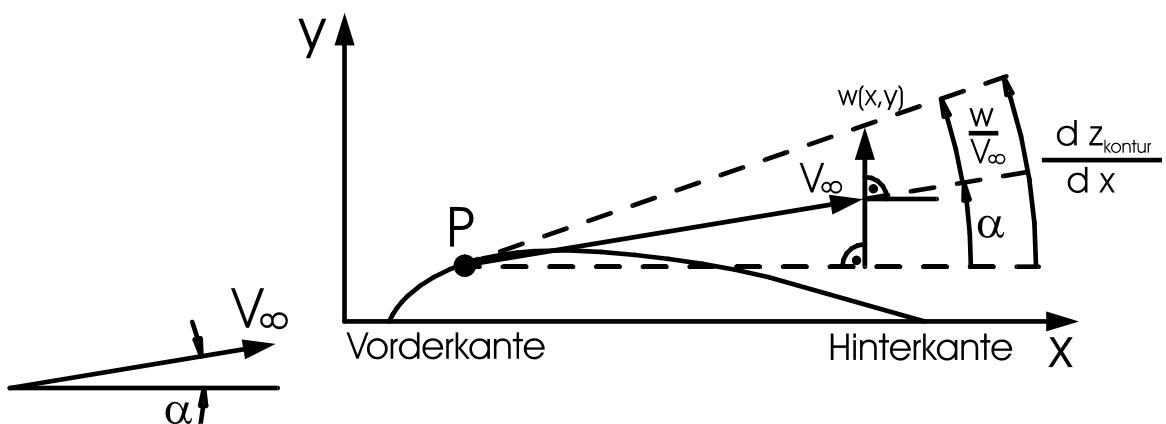


Bild 8.3 Zusammenhang zwischen der Flügelprofilkontur und der Normalgeschwindigkeitskomponente

In jedem Punkt P der Oberfläche müssen die Randbedingungen dergestalt erfüllt sein, daß die resultierende Geschwindigkeit an der Oberfläche des Tragflügels tangential verläuft. In der linearisierten Form für kleine Änderungen der Kontur ergibt das für den unendlich dünnen Flügel:

$$\alpha + \frac{w(x, y)}{V_\infty} = \frac{\partial z_c}{\partial x} \quad (8.4)$$

Anders aufgelöst wird daraus auch:

$$\frac{w(x, y)}{V_\infty} = \frac{\partial z_c}{\partial x} - \alpha \quad (8.5)$$

Die geometrische Größe z_s ist darin die Kontur des Profils an der Stelle $y = \text{konstant}$. Gl. (8.5) stellt die Tangentialbedingung der Flügeloberfläche dar. Für die Tragflächentheorie besteht in der Hauptaufgabe, passende Wirbelflächenverteilungen $\gamma(x, y)$ und $\delta(x, y)$ zu finden, daß diese Tangentialbedingung an jedem Punkt der jeweiligen Profiloberfläche erfüllt werden kann. Die Wirbelverteilung im Nachlauf $\delta_w(y)$ ist an den Wert der Stärke der Wirbelfläche an der Hinterkante des Flügels $\delta(x, y)$ gebunden, womit diese keine unabhängige Variable dieses Strömungsproblems darstellt.

Sowie $\gamma(x, y)$ bestimmt ist, erhält man den Druckunterschied zwischen der oberen und unteren Oberfläche des Flügels $\Delta p(x, y)$ und damit auch die Lastverteilungsfunktion $l(x, y)$.

$$\Delta p(x, y) = \rho V_\infty \gamma(x, y) \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} l(x, y) &= \frac{\Delta p}{1/2 \rho V_\infty^2} \\ &= \frac{2 \gamma(x, y)}{V_\infty} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Diese Ergebnisse sind in Abschnitt 6.2.2, Gln. (6.11) und (6.13), bereits vorweggenommen worden.

Der lokale Auftriebsbeiwert $c_a(y)$ eines Profilschnittes des Flügels an einer spannweiten Position y ergibt sich aus dem Integral über die Lastverteilungsfunktion $l(x, y)$ und der lokalen Profilsehnenlänge $c(y)$.

$$c_a(y) = \frac{1}{c(y)} \int_0^{c_{\max}} l(x, y) dx \quad (8.8)$$

Damit errechnet sich der Gesamtauftriebskoeffizient des Flügels zu:

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{1}{A} \iint_A l(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{S} \int_{-S}^{+S} c_a(y) c(y) dy \end{aligned} \quad (8.9)$$

Die gesamte Zirkulation der Auftriebswirbelfläche $\gamma(x, y)$, die gebundene Wirbel darstellt, ist an einer Spannweitenposition y :

$$\Gamma(y) = \int_0^{c_{\max}} \gamma(x, y) dx \quad (8.10)$$

Der induzierte Widerstandskoeffizient ist, wie es bereits in der klassischen Traglinientheorie beschrieben wurde:

$$c_{wi} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-S}^{+S} \Gamma(y) \varepsilon(y) dy \quad (8.11)$$

Der darin vorkommende Strömungsablenkwinkel ist:

$$\varepsilon = \frac{1}{4 \pi V_\infty} \int_{-S}^{+S} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy \quad (8.12)$$

Daß der induzierte Widerstandskoeffizient nur aus der Kenntnis der spannweitigen Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$ berechnet werden kann, läßt sich daher erklären, daß der Widerstand aus der kinetischen Energie des Nachlaufwirbelfeldes entsteht, das wiederum nur von der spannweitigen Verteilung der Zirkulation $\Gamma(y)$ abhängt und diese von der Stärke der gebundenen Auftriebswirbelfläche $\gamma(x, y)$.

8.2 Induzierte Geschwindigkeit

Die Normalgeschwindigkeitskomponente $w(x, y)$, die durch die Verteilung der Stärken der Wirbelflächen $\gamma(x, y)$, $\delta(x, y)$ und $\delta_w(y)$ induziert wird, kann durch das *Gesetz von Biot-Savart* ermittelt werden. Bild 8.4 hilft die geometrischen und strömungsmechanischen Ver-

hältnisse auf einem infinitesimal kleinen Segment des betrachteten Tragflügels zu veranschaulichen.

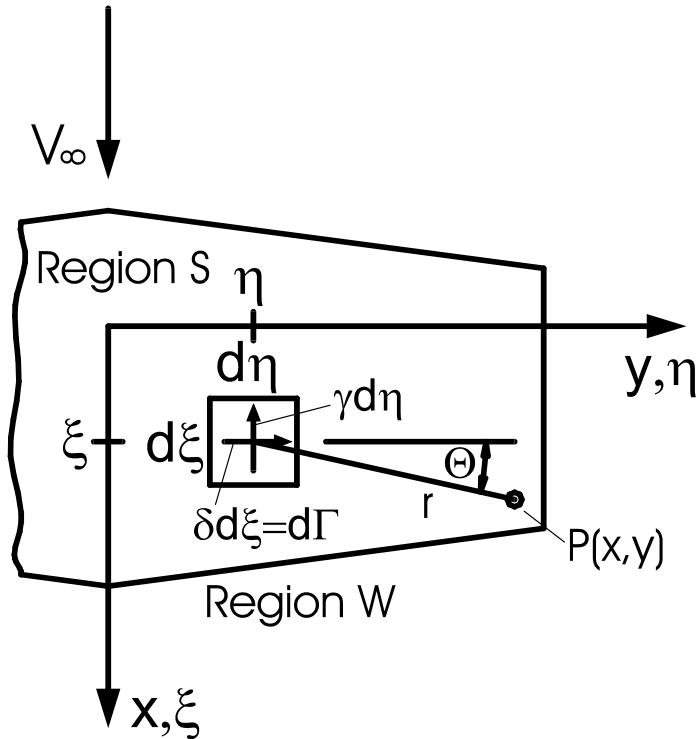


Bild 8.4 Induzierte Normalgeschwindigkeitskomponente am Punkt $P(x,y)$

Am Punkt $P(\xi, \eta)$ ist die spannweiteige Wirbelstärke $\gamma(\xi, \eta)$. Ein Stück des Wirbelfadens der Wirbelfläche mit der Ausdehnung $d\xi$ hat die Stärke $d\Gamma = \gamma d\xi$ und es dehnt sich in die y - oder η -Richtung aus. Ein Segment der Länge $d\eta$ dieses Wirbelfadens wird am Punkt $P(x,y)$ im Abstand r vom Punkt $P(\xi, \eta)$ eine Geschwindigkeit induzieren.

$$\begin{aligned} |dV| &= \left| \frac{d\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \cdot \vec{x} \cdot \vec{r}}{r^3} \right| \\ &= \frac{\gamma d\xi}{4\pi} \frac{d\eta \cdot r \cdot \sin \theta}{r^3} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Folgt man der *Rechten Hand Regel* für die Stärke γ , wird $|dV|$ abwärts in Richtung der negativen z -Richtung induziert. Deshalb wird nun der Anteil der Geschwindigkeit nach Gl. (8.13) mit der induzierten Geschwindigkeit $w(x,y)$ bezeichnet.

$$(dw)_\gamma = -|dV| \quad (8.14)$$

Weiterhin wird die folgende Umschreibung genutzt.

$$\sin \theta = \frac{(x - \xi)}{r} \quad (8.15)$$

Damit wird der Anteil der gebundenen Wirbel an der induzierten Geschwindigkeit am Punkt $P(x,y)$:

$$(d w)_\gamma = -\frac{\gamma}{4\pi} \frac{(x - \xi)}{r^3} d\xi d\eta \quad (8.16)$$

Ähnlich ist der Anteil der elementaren Wirbel in Profilsehnenrichtung mit der Stärke $\delta d\eta$ an der induzierten Geschwindigkeit:

$$(d w)_\delta = -\frac{\delta}{4\pi} \frac{(y - \eta)}{r^3} d\xi d\eta \quad (8.17)$$

Um die Geschwindigkeit, die an dem Punkt $P(x,y)$ induziert wird, für die gesamte Auftriebsfläche zu erhalten, müssen die Gln.(8.16) und (8.17) über die Tragflügelfläche der Region S nach Bild 8.4 integriert werden.

Die Geschwindigkeit, die durch den gesamten Nachlauf nach Gl. (8.17) induziert wird, kann durch die Integration über die Nachlaufregion W in Bild 8.4 berechnet werden, indem $\delta(x,y)$ durch $\delta_w(y)$ ersetzt wird.

Folgendes gilt:

$$r = \left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right)^{1/2} \quad (8.18)$$

Somit wird die induzierte Geschwindigkeit $w(x,y)$ am Punkt $P(x,y)$ durch beide Einflüsse, nämlich durch die Auftriebs- und die Nachlaufwirbelfläche:

$$\begin{aligned} w(x,y) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(x - \xi)\gamma(\xi, \eta) + (y - \eta)\delta(\xi, \eta)}{\left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\right)^{3/2}} d\xi d\eta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_W \frac{(y - \eta)\delta_w(\eta)}{\left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\right)^{3/2}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (8.19)$$

Das generelle Problem der Tragflächentheorie ist, Gl. (8.19) für $\gamma(x,y)$ und $\delta(x,y)$ dergestalt zu lösen, daß die Randbedingung der tangentialen Geschwindigkeit an der Flügeloberfläche, Gl. (8.5), und die Bedingung der Drehungsfreiheit, Gl. (8.3), erfüllt werden können.

Gewöhnlich geschieht das mit numerischen Strömungsberechnungsmethoden, indem man die Oberfläche des Flügel in eine Zahl von Panel aufteilt und gewährleistet, daß die vorabgenannten Bedingungen an jedem Kontrollpunkt eines Panels erfüllt werden können.

8.3 Wirbelgittermethode

Eine verwandte aber einfachere Methode im Vergleich zu der Tragflächenmethode, die in den Abschnitten 8.1 bis 8.3 beschrieben wurde, ist die Wirbelgittermethode. Hierbei wird eine Anzahl von Hufeisenwirbeln verschiedenster Stärken Γ_n auf kleinen Kontrollflächen, die auf der Tragfläche angeordnet sind, angebracht. Bild 8.5 zeigt das anhand eines Tragflüglerausschnittes.

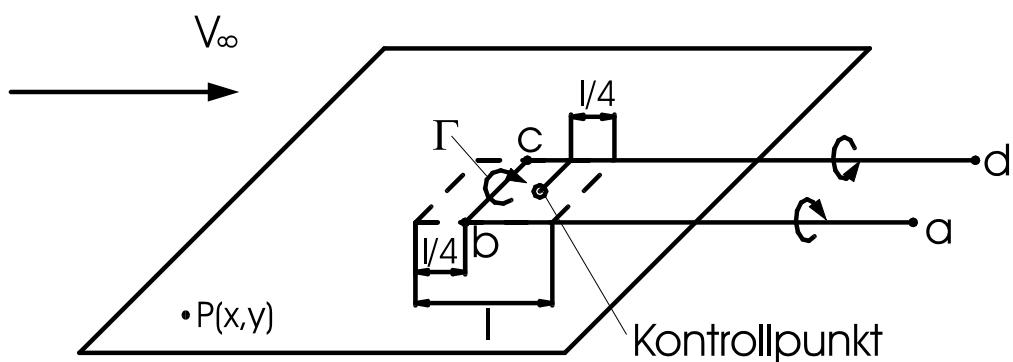


Bild 8.5 Schema eines einzelnen Hufeisenwirbels bei der Wirbelgittermethode

Die gestrichelten Linien definieren ein Panel auf der Tragfläche, l ist die Länge eines Panels in Strömungsrichtung. Ein Hufeisenwirbel, der durch die Punkte a , b , c und d läuft, liegt bei $l/4$ von der Panelvorderkante entfernt. Ein Kontrollpunkt befindet sich auf der Symmetrielinie des Wirbel bei $3/4 l$, ebenso von der Vorderkante des Panels gemessen. Die durch den Hufeisenwirbel induzierte Geschwindigkeit an einem beliebigen Punkt $P(x,y)$ kann durch das Biot–Savart–Gesetz für jedes Wirbelement ab , bc und cd separat berechnet werden.

Nun kann der gesamte durch eine endliche Anzahl Panel strukturierte Tragflügel in Bild 8.6 betrachtet werden.

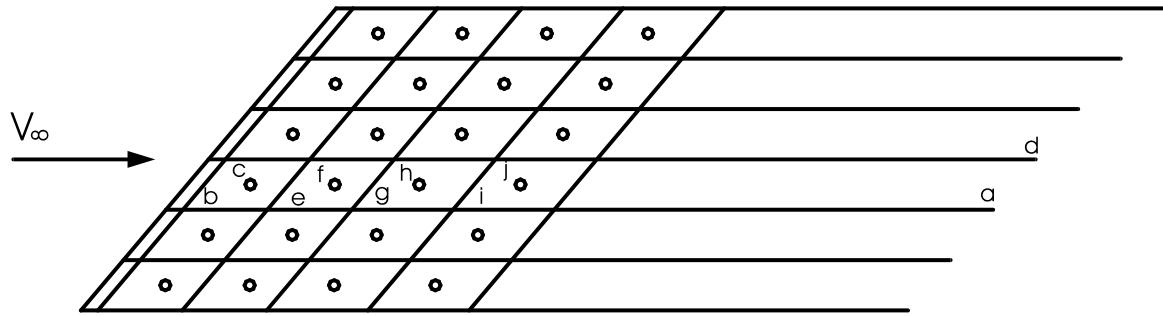


Bild 8.6 Anordnung eines Wirbelgittersystems nach der Wirbelgittermethode

Eine Serie von Hufeisenwirbeln werden im Fall des Bildes 8.6 superponiert. Beispielsweise liegt dort ein Wirbel mit $abcd$ an der Vorderkante des Flügel. Dahinter, stromab, liegt ein Hufeisenwirbel $aefd$ und so fort. Der gesamte Flügel ist mit solchen Wirbeln, alle mit unterschiedlicher Wirbelstärke Γ_n versehen, in Form eines *Gitters* belegt.

An einem beliebigen Punkt $P(x,y)$ kann die induzierte Geschwindigkeit durch die Einflüsse aller Hufeisenwirbel über das Biot–Savart–Gesetz ermittelt werden. Wenn die Stromlinienbedingung an der Oberfläche des Flügels an jedem Punkt erfüllt wird, kann ein System simultaner, algebraischer Gleichungen erstellt werden, das für die unbekannten Wirbelstärken Γ_n gelöst werden kann. Eine detaillierte Beschreibung dieser Methode nach *J. J. Bertin und M. L. Smith* kann in „Aerodynamic for Engineers“ gefunden werden.

8.4 Vereinfachte Wirbelgittermethode

Die numerische Strömungsberechnung der Wirbelgittermethode aus Abschnitt 8.3 kann erheblich vereinfacht werden, wenn man die Schar der Hufeisenwirbel nach Bild 8.7 dadurch verringert, daß man sie wie dort angegeben anordnet.

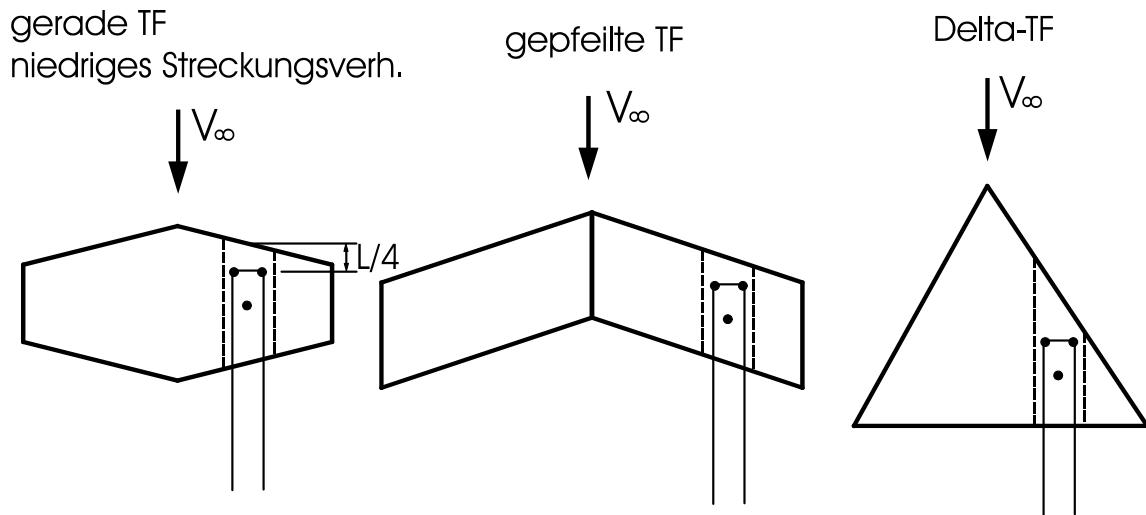


Bild 8.7 Anordnung der Hufeisenwirbel nach der Vereinfachten Wirbelgittermethode

In diesem vereinfachten Gitter dehnen sich die einzelnen Panel von der Vorder- bis zur Hinterkante der Flügeloberfläche aus. Pro Sektion des Flügel existiert also nur ein Hufeisenwirbel in einem einzigen Panel in Profilsehnenrichtung. Der Wirbel liegt auf dem $\frac{1}{4}$ Punkt des Panels von der Vorderkante gemessen, wie es im linken Teil des Bildes 8.7 dargestellt ist. Eine endliche Zahl von Panel ist über den Flügel in Spannweitenrichtung verteilt. Wiederum liegen die Kontrollpunkte innerhalb des Panels in Sehnenrichtung mittig auf dem $\frac{3}{4}$ Punkt. Diese geometrische Konfiguration ist grundsätzlich identisch für einen gepfeilten Flügel und einen Deltaflügel im mittleren und rechten Teil des Bildes 8.7.

Details dieser Methode sind in „Aerodynamik des Flugzeugs“ nach H. Schlichting und E. Truckenbrodt beschrieben.

8.5 Anwendungen der Tragflügelberechnungsmethoden

- *Klassische Traglinientheorie:* Diese Methode liefert für grade Tragflügel mit kleinen bis hohen Streckungsverhältnissen von $A > 3$ gute Ergebnisse. Die spannweiteige Berechnung der Auftriebsverteilung ist möglich, was in dem Gesamtauftrieb, dem gesamten induzierten Widerstand und in dem Rollmoment resultiert.
- *Erweiterte Traglinientheorie:* Diese Theorie lässt sich auf beliebige Grundrisse von Tragflügeln und Streckungsverhältnisse anwenden. Die spann-

weitige Auftriebsverteilung ist berechenbar, was in dem Gesamtauftrieb, dem gesamten induzierten Widerstand, in dem Rollmoment und in Näherungswerten für das Nickmoment resultiert.

- *Tragflächentheorie:* Sie lässt sich auf alle vorher beschriebenen Fälle anwenden. Ebenso ist die Verteilung des Auftriebs in Spannweiten- als auch in Profilsehnenrichtung zu berechnen. Das resultiert in dem Gesamtauftrieb, dem gesamten induzierten Widerstand, im Rollmoment und im Nickmoment.