ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

528

LEÇONS D'AÉRODYNAMIQUE APPLIQUÉE

PAR

M. A. TOUSSAINT

Professeur à la Sorbonne

Directeur de l'Institut aérotechnique de Saint-Cyr

I

AÉRODYNAMIQUE

ET

MÉCANIQUE DU PLANEUR

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1937

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.

René AUDUBERT
Directeur de Laboratoire à l'Ecole des Hautes Etudes
ÉLECTROCHIMIE THÉORIQUE

J.-P. BECQUEREL
Professeur au Museum d'Histoire Naturelle
OPTIQUE ET MAGNÉTISME AUX TRÈS BASSES TEMPÉRATURES

G. BERTRAND
Membre de l'Institut
Professeur à l'Institut Pasteur
CHIMIE BIOLOGIQUE

L. BLARINGHEM
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
BIOLOGIE VÉGÉTALE

Georges BOHN
Professeur à la Faculté des Sciences
ZOOLOGIE EXPÉRIMENTALE

J. BORDET
Prix Nobel
Directeur de l'Institut Pasteur de Bruxelles
MICROBIOLOGIE

J. BOSLER
Directeur de l'Observatoire de Marseille
ASTROPHYSIQUE

Léon BRILLOUIN
Professeur au Collège de France
THÉORIE DES QUANTA

Louis de BROGLIE
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Prix Nobel de Physique
I. PHYSIQUE THÉORIQUE
II. PHILOSOPHIE DES SCIENCES

Maurice de BROGLIE
De l'Académie Française
et de l'Académie des Sciences
PHYSIQUE ATOMIQUE EXPÉRIMENTALE

D. CABRERA
Directeur de l'Institut de Physique et Chimie de Madrid
EXPOSÉS SUR LA THÉORIE DE LA MATIÈRE

E. CARTAN
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
GÉOMÉTRIE

M. CAULLERY
Membre de l'Académie des Sciences
Professeur à la Faculté des Sciences
BIOLOGIE GÉNÉRALE

L. CAYEUX
Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France
GÉOLOGIE

A. COTTON
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
MAGNÉTO-OPTIQUE

Mme Pierre CURIE
Professeur à la Sorbonne
Prix Nobel de Physique
Prix Nobel de Chimie
RADIOACTIVITÉ ET PHYSIQUE NUCLÉAIRE

Véra DANTCHAKOFF
Ancien Professeur à l'Université Columbia (New-York)
Organisateur de l'Institut de Morphogenèse Expérimentale (Moscou Ostankino)
LA CELLULE GERMINALE DANS L'ONTOGENÈSE ET L'ÉVOLUTION

E. DARMOIS
Professeur à la Sorbonne
CHIMIE-PHYSIQUE

K. K. DARROW
Bell Telephone Laboratories
CONDUCTIBILITÉS DANS LES GAZ

Arnaud DENJOY
Professeur à la Sorbonne
THÉORIE DES FONCTIONS DE VARIABLE RÉELLE

J. DUESBERG
Recteur de l'Université de Liége
BIOLOGIE GÉNÉRALE EN RAPPORT AVEC LA CYTOLOGIE

CATALOGUE SPÉCIAL SUR DEMANDE

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

528

LEÇONS D'AÉRODYNAMIQUE APPLIQUÉE

PAR

M. A. TOUSSAINT

Professeur à la Sorbonne

Directeur de l'Institut aérotechnique de Saint-Cyr

I

AÉRODYNAMIQUE

ET

MÉCANIQUE DU PLANEUR

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1937

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

Copyright 1937 by Librairie scientifique Hermann et Cie,
Paris

CHAPITRE PREMIER

ÉTUDE DU VOL PLANÉ
(en régime non acrobatique)

L'application des lois de la mécanique à cette étude nécessite la connaissance préalable des caractéristiques définissant le système résultant des forces et couples aérodynamiques appliqués au planeur. Nous résumerons donc, dès le début de notre étude, les résultats expérimentaux et théoriques concernant ces caractéristiques en nous limitant d'abord à celles correspondant à une translation rectiligne contenue dans le plan de symétrie longitudinal.

En outre nous procèderons en deux étapes distinctes, savoir :

a) étude du vol plané pour les régimes d'équilibre sur une trajectoire rectiligne contenue dans le plan de symétrie.

b) étude des conditions d'équilibre et de stabilité du planeur dans les conditions du vol plané défini ci-dessous :

Vol plané en régime d'équilibre sur une trajectoire rectiligne permanente (en l'absence de toute perturbation de roulis, de giration ou de dérive).

1. **Caractéristiques aérodynamiques du planeur.** — Les essais du planeur à la balance aérodynamique nous fourniront en général les résultats classiques représentés sur la figure 1, c'est-à-dire :

1° les courbes (1) : relatives à l'aile ou à la cellule sustentatrice seule ;

2° les courbes (2) : relatives au planeur démuni de son empennage horizontal. (Aile ou cellule sustentatrice + les résistances passives) ;

3° les courbes (3) : relatives au planeur complet.

A propos de ces résultats nous ferons les remarques générales suivantes :

a) *Courbes unitaires* $Cz = f(i)$. Ces courbes sont en général rectilignes dans les cas (1) (2) (3) dans le domaine des incidences modérées ($i \leqslant 15°$).

Elles diffèrent entre elles modérément. Ainsi les résistances passives peuvent éventuellement faire apparaître entre (2) et (1) un $\Delta\, Cz(p)$ modéré, mais de signe et d'évolution peu prévisibles.

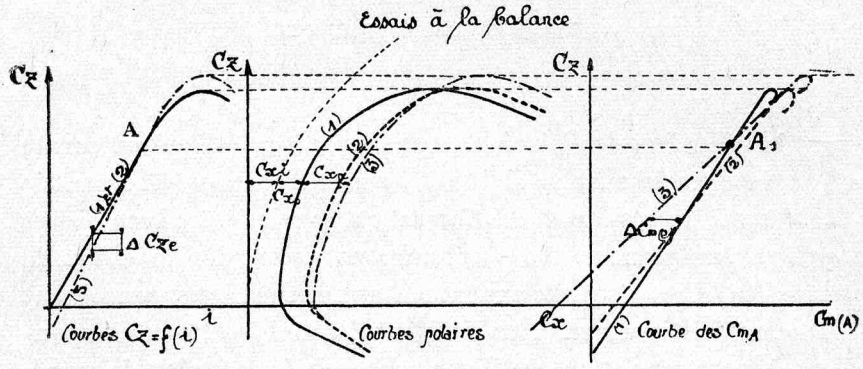


Fig. 1.

De même l'addition de l'empennage horizontal comporte toujours un $\Delta Cz(e)$ généralement négatif aux faibles incidences et positif aux grandes. Il en résulte que les courbes (2) et (3) se rencontreront en un point A qui correspondra sensiblement à la portance nulle de l'empennage.

b) *Courbes polaires* $Cz = f(Cx)$ et $Cz^2 = f(Cx)$. La courbe (1) pour l'aile ou la cellule seule sera fréquemment d'allure parabolique pour les Cz correspondant à la portion linéaire de (Cz, *i*). Au point de vue théorique nous savons que cette évolution en Cz^2 de la résistance induite $Cxi(a)$ s'exprime fréquemment sous les formes :

$$Cxi_{(a)} = \frac{Cz^2}{\pi\lambda}(1 + \delta) = \frac{Cz^2}{\pi k^2_{(a)}\lambda} = \frac{C_z{}^2 S}{\pi L_1{}^2}, \qquad (1)$$

---

(1) Ainsi pour une aile d'envergure infinie comportant un profil Joukowsk, (G 430) M. Girerd a trouvé :

$$100\, Cx_0 = 1{,}3 + 0{,}000324\,(100\, Cz - 33)^{2{,}326}$$

pour $0 < i < 14°$.

$L_1^2 = k_{(a)}^2 L^2$ étant l'envergure réduite du monoplan de même résistance induite que la cellule considérée.

Toutefois Cx_0 n'est pas pratiquement constant et son évolution en fonction de Cz (ou de i) ne s'exprime pas simplement même aux incidences modérées (1). Pour simplifier nous admettrons dans cette étude que l'évolution de Cx_0 avec Cz peut être assimilée à une loi parabolique et incorporée dans l'expression de $Cxi(a)$ par l'introduction d'un facteur ϵ_a de réduction de L_1.

On aura dans ces conditions, pour la cellule seule :

$$Cx_{(a)} = \frac{v}{1} Cx_0 + \frac{Cz^2 S}{\pi e_a L_1^2} \qquad (2)$$

Pour déterminer le facteur de Cz^2 on aura grand intérêt a repré-

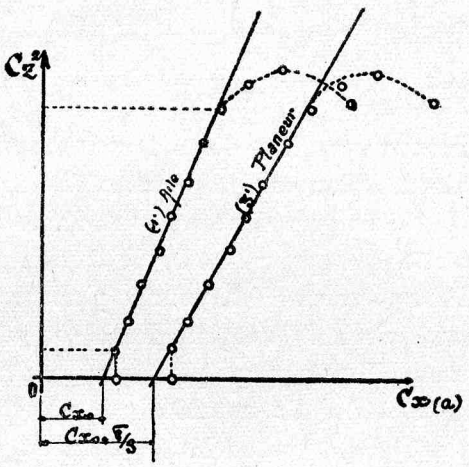


fig. 2

senter la polaire expérimentale avec les coordonnées Cx et Cz^2 (fig. 2) Dans ces conditions les points expérimentaux s'aligneront suivant une direction dont la pente dCx/dCz^2 fournira la valeur du facteur : $S/\pi e_a L_1^2$. Si on peut calculer d'après l'aérodynamique des ailes le facteur théorique de résistance induite :

$$S/\pi L_1^2 = S/\pi L^2(1 + \delta) = S/\pi k_a^2 L^2$$

la comparaison de ce facteur avec le précédent donnera la valeur de $1/e_a$ qui caractérise la variation de Cx_0. On notera également les limites Cz^2 à partir desquelles les points expérimentaux s'écartent de la droite

La courbe (2), fig. 1, pour le planeur sans empennage différera

de la courbe (1) d'une quantité $Cx(p)$ relative aux résistances passives. Ce $Cx(p)$ sera aussi plus ou moins évolutif avec Cz. Pour une bonne association (Voilure + résistances passives) l'évolution de Cxp avec Cz pourra aussi être assimilée à une variation en Cz^2 et incorporée dans un facteur analogue au e_a de l'aile.

La courbe (3) pour le planeur complet diffèrera très modérément de la courbe (2). Cela correspond à un $Cx(e)$ généralement très petit que nous supposerons incorporé aussi dans un facteur total résultant : e. La représentation de Cx en Cz^2 se fera comme pour la cellule (courbe 3′) (fig. 2).

En définitive pour le planeur complet, dans nos calculs ultérieurs, nous admettrons qu'aux incidences utilisables pour les régimes de vol plané étudiés, la polaire (3) peut se représenter par l'expression

$$Cx = Cx_{(0)} + Cx_{(p)} + \frac{Cz^2 S}{\pi e L^2_1} = \left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right) + \frac{C_z{}^2 S}{\pi e L_1{}^2} \qquad (2')$$

Remarque importante I. — Nous devons mentionner de suite que pour l'étude des planeurs proprement dits (planeurs de vol à voile) les hypothèses précédentes seront d'une approximation moins satisfaisante que pour l'étude de l'avion-planeur (Avion sans hélices). Il importe en effet, pour le planeur de vol à voile, d'étudier plus spécialement le régime de vol comportant la vitesse verticale minimum. Nous verrons plus loin que ce régime correspond fréquemment à des Cz notables pour lesquels l'assimilation de la polaire réelle avec la relation (2′) n'est plus de rigueur suffisante, à moins d'avoir tracé la représentation fig. 2 en conséquence.

Remarque II. — Il est d'usage technique d'assimiler l'ensemble des *résistances passives réelles* à la résistance d'une *surface fictive* σ : dont le coefficient unitaire serait $C(\sigma) = 1$. Dans ces conditions on aura :

$$Cxp\,S = 1 \times \sigma \qquad \text{d'où} \qquad Cxp = \frac{\sigma}{S}.$$

Fréquemment aussi on associe la somme $(Cx_0 + \sigma/S)$ qu'on représente par f/S. En d'autres termes on pose :

$$Cx_0 S + \sigma = f,$$

f représente une surface fictive équivalente aux résistances passives totales.

2. **Équations du vol plané rectiligne** (fig. 3). — Si nous supposons d'abord que la vitesse V sur la trajectoire est constante les équations d'équilibre du planeur seront :

$$\text{I} \quad \begin{cases} \Sigma M_{(G)} = 0 \text{ Equations des moments p. r. à G, avec :} \\ \dfrac{dM_G}{d(i, j, h)} > 0 \text{ Conditions de stabilité.} \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{P} \quad \begin{cases} P \sin \theta = Rx = Cx V^2 S\rho/2 \text{ (Equation de traction)} & (3) \\ P \cos \theta = Rz = Cz V^2 S\rho/2 \text{ (Equation de sustentation)} & (4) \end{cases}$$

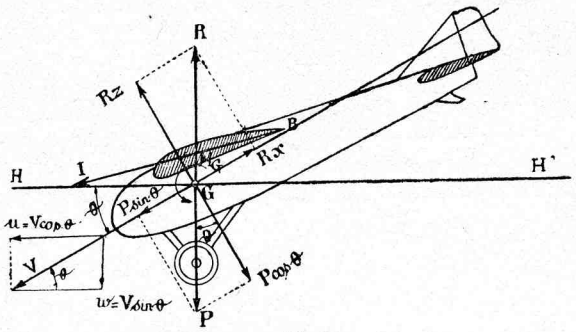


Fig. 3

Les équations (I) expriment que le moment résultant par rapport au centre de gravité G est nul, ce qui implique la nullité des trois composantes éventuelles du moment résultant. Nous étudierons plus loin cette condition.

Les équations (3) et (4) expriment que les composantes du poids et de la résultante aérodynamique sont égales et opposées respectivement.

a), *Pente de la trajectoire.* — Elle sera donnée par :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Rx}{Rz} = \frac{Cx}{Cz}. \qquad (5)$$

On voit qu'elle est indépendante de l'altitude du vol et qu'elle dépend uniquement du rapport Cx/Cz qui se dénomme *finesse aérodynamique du planeur*. Cette finesse dépend seulement de l'incidence i du vol, laquelle nous serait donnée par l'équation (1) appliquée à la composante : moment longitudinal ou de tangage.

Sur les courbes caractéristiques du planeur (fig. 4), chaque incidence i définit une valeur de Cz et de Cx.

En outre en menant le vecteur OB_1B_2 qui coupe la polaire en B_1 et B_2 correspondant respectivement aux incidences i_1 et i_2

on voit qu'une même valeur de $tg\theta$ est obtenue (éventuellement) pour deux incidences différentes i_1 et i_2 ; l'une : i_1, correspond au *régime rapide*, l'autre : i_2 correspond au *régime lent*. Il est évident que la pente minimum $tg\theta m$ correspondra au rayon vecteur OA tangent en A à la polaire. Le point A correspond aussi à la finesse optimum $(Cx/Cz)_0 = Fi$. L'incidence correspondante est i_0.

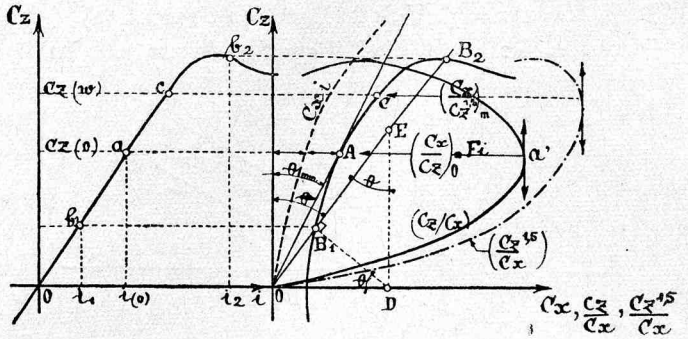


Fig. 4

Remplaçons Cx par sa valeur (2'), on obtient :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{Cx}{Cz} = \frac{Cx_0 + \frac{\sigma}{S}}{Cz} + \frac{CzS}{\pi e L_1^2}. \qquad (5')$$

Sous cette forme on voit que $tg\theta$ sera minimum quand les deux termes du second membre seront égaux (puisque le produit de ces deux termes est constant). On peut aussi écrire :

$$\frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{dCz} = 0 = \frac{-\left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right)}{Cz^2_{(t)}} + \frac{S}{\pi e L_1^2} \qquad (6)$$

ce qui donne pour l'incidence optimum : i_0

$$\frac{Cx_0 + \frac{\sigma}{S}}{Cz_{(t)}} = \frac{Cz_{(t)}S}{\pi e L_1^2} = \frac{Fi}{2} \qquad (6')$$

$$\text{et } \operatorname{tg}\theta_m = 2\left(\frac{Cx_0 + \frac{\sigma}{S}}{Cz_t}\right) = 2\,\frac{Cz_t S}{\pi e L_1{}^2} \qquad (7)$$

On a aussi :

$$(Cx_0 S + \sigma) = f = \frac{Cz^2 S^2}{\pi e L_1{}^2}. \qquad (6'')$$

b), *Rayon d'atterrissage.* — Par vent nul le rayon d'atterrissage R, à partir d'une altitude Z, sera donné par :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{z}{R} \qquad \text{d'où} \qquad R = \frac{z}{\operatorname{tg}\theta} \tag{8}$$

Donc R sera maximum pour $tg\theta = tg\theta m$.

Ce résultat est important puisqu'il commande la décision à prendre pour un aviateur dont le moteur s'arrête à une altitude Z au-dessus d'une zone indésirable pour l'atterrissage. Il doit alors prendre un régime de vol plané à pente minimum afin que le rayon R soit le plus grand possible et lui permette d'atteindre éventuellement les limites extérieures de la zone prohibée.

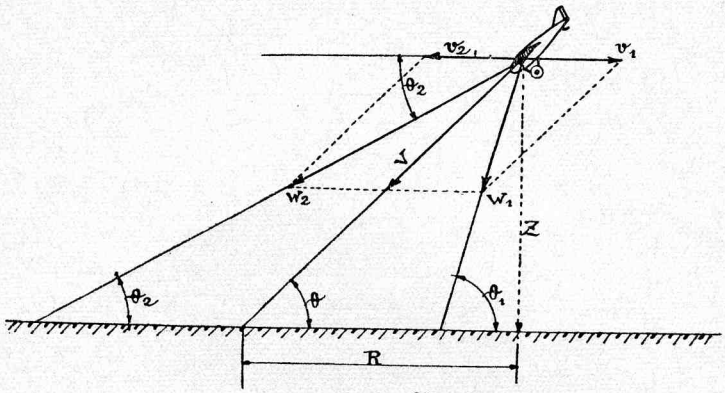


Fig. 5

En outre il convient de rappeler que la pente θ exprimée ci-dessus correspond au vol plané par vent nul, c'est-à-dire quand la vitesse aérodynamique V est égale à la vitesse par rapport au sol.

Si le vent n'est pas nul on peut avoir à considérer la pente de la trajectoire absolue par rapport au sol.

Soit alors v la composante du vent naturel.

En négligeant l'effet de dérive éventuel la trajectoire absolue par rapport au sol sera caractérisée par la vitesse absolue W résultant de l'addition géométrique des vitesses V et $\vec{v}$ (V est la vitesse relative de l'avion par rapport à l'air et $\vec{v}$ est la vitesse du vent ou vitesse d'entraînement de l'avion par rapport au sol.

Dans ces conditions on aura par exemple les pentes absolues θ_1 ou θ_2 pour les vitesses v_1 et v_2 d'où il résulte que pour l'aviateur avec moteur calé le rayon d'atterrissage max. sera obtenu en exécutant le vol plané optimum (θm) suivant la direction du

vent local (ce qui n'exclura pas d'effectuer le contact avec le sol en reprenant si possible l'orientation vent-debout durant la dernière phase du vol plané.

c), *Étude succincte du vol plané au régime de finesse optimum* (régime : *t*). De l'expression (σ') on tire successivement :

$$C_{zt}S = \frac{\pi}{2} F_t e L_1^2 ; \quad f = \frac{C_{zt}^2 S^2}{\pi e L_1^2} = \frac{\pi}{4} F_t^2 e L_1^2 ; \quad F_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{f}{e L_1^2}}. \quad (9)$$

La vitesse sur la trajectoire au régime (*t*) sera donnée par exemple à partir de l'égalité des deux termes de $\left(\frac{Rx}{Rz}\right)_{mi}$.

On a ainsi successivement :

$$\frac{F_i}{2} = \frac{f \rho_0 V_t^2 \delta}{2P \cos \theta_m} = \frac{C_{zt}^2 S^2}{\pi e L_1^2} \frac{\rho_0 V_t^2 \delta}{2P \cos \theta_m} = \frac{2P \cos \theta_m}{\pi \rho_0 e L_1^2 V_t^2 \delta}$$

$$V_t^4 \delta^2 = \frac{(2P \cos \theta_m)^2}{f \pi \rho_0^2 e L_1^2} = \frac{(2P \cos \theta_m)^2}{\frac{\pi^2}{4} \rho_0^2 F_t^2 (e L_1^2)^2}$$

$$V_t^2 \delta = \frac{4P \cos \theta_m}{\pi \rho_0 F_t e L_1^2} \qquad \text{avec : } \cos \theta_m = \frac{1}{\sqrt{1 + F_t^2}}$$

$$V_t = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \frac{2}{\sqrt{\pi \rho_0}} \sqrt{\frac{P}{e L_1^2 F_t \sqrt{1 + F_t^2}}} \simeq \frac{3{,}19}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{P}{e L_1^2 F_t}}. \quad (10)$$

3. **Vitesse sur la trajectoire de vol plané à un régime quelconque.** — Pour exprimer V en fonction des caractéristiques du planeur il suffit d'éliminer θ entre les équations (3) et (4). Nous aurons ainsi en élevant au carré et en additionnant :

$$P^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = P^2 = (\rho / 2V^2 S)^2 (Cx^2 + Cz^2)$$

d'où il résulte :

$$V^2 = \frac{2P}{\rho S} \frac{1}{\sqrt{Cx^2 + Cz^2}} = \frac{C^{te}}{|OB_1|}$$

$$\boxed{V = \sqrt[2]{\frac{2P}{\rho S}} \frac{1}{\sqrt[4]{Cx^2 + Cz^2}} = \frac{C^{te}}{\sqrt{OB_1}}} \quad (11)$$

On voit que la vitesse V est proportionnelle, pour une incidence donnée, à $\sqrt{2/\rho}$ et à $\sqrt{P/S}$. Le coefficent de proportionnalité étant $1/\sqrt{Cr}$ avec $Cr = \sqrt{Cx_2 + Cz_2} = |OB_1|$. La charge unitaire

de la voilure P/S intervient en premier lieu comme critère de V. Mais en outre la densité de l'air à l'altitude du vol plané intervient également. Il en résulte que notre hypothèse initiale d'une trajectoire rectiligne parcourue à vitesse constante par le planeur est infirmée puisque la vitesse V, à l'altitude Z est proportionnelle à $1/\sqrt{\rho}$. En d'autres termes pour le problème envisagé les vitesses V à l'altitude Z et V_0 à l'altitude $Z = 0$ sont dans le rapport :

$$\frac{V^2}{V_0^2} = \frac{\rho_0}{\rho} \qquad \text{ou} \qquad V\sqrt{\rho} = V_0\sqrt{\rho_0} = C^{te}.$$

Cependant l'approximation que nous avons faite réside uniquement dans la simplification d'écriture adoptée pour l'expression de l'équation (3). Plus rigoureusement cette équation devrait faire apparaître les termes d'inertie, c'est-à-dire la force fictive $\frac{P}{g}\frac{dV}{dt}$ due à la masse P/g et à l'accélération tangentielle $\frac{dV}{dt}$.

On aurait ainsi :

$$P \sin \theta - \frac{P}{g}\frac{dV}{dt} = Rx = Cx\rho/2V^2S. \qquad (3')$$

Pour nous rendre compte de l'ordre de grandeur de l'erreur commise nous évaluerons la force d'inertie en supposant une trajectoire planée rectiligne effectuée en *Atmosphère Standard*. Pour cette atmosphère de référence l'altitude Z et la densité correspondante ρ sont liées par les relations :

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_0(1 - mz)^n \\ \text{avec } m &= \frac{0{,}0065}{288} = 0{,}0000255 \qquad \text{et} \qquad n = 4{,}255 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Dans ces conditions pour une incidence donnée (c'est-à-dire pour une pente θ déterminée) V est fonction de ρ comme il a été dit, ρ est fonction de Z comme il est convenu et Z est fonction de la durée t du vol. On aura donc :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\rho} \times \frac{d\rho}{dz} \times \frac{dz}{dt}.$$

Chacun des facteurs constitutifs de l'expression (12) est aisément évalué :

La relation (11) nous donne successivement :

$$\rho/2V^2 = C^{te} = \frac{P}{S}\frac{1}{\sqrt{Cr}} \qquad \text{ou} \qquad V^2 = \frac{2 \times C^{te}}{\rho},$$

il en résulte :

$$2V\frac{dV}{d\rho} = -\frac{2 \times C^{te}}{\rho^2} = -\frac{2}{\rho^2} \times \frac{\rho}{2} V^2 = -\frac{V^2}{\rho}$$

Soit :

$$\boxed{\frac{dV}{d\rho} = -\frac{V}{2\rho}} \qquad (13)$$

La relation (12) nous donne de même

$$\frac{d\rho}{dz} = -\rho_0 mn(1 - mz)^{n-1}$$

soit :

$$\boxed{\frac{d\rho}{dz} = -\rho_0 mn\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}} \qquad (14)$$

Enfin la vitesse verticale de descente planée s'écrit :

$$w = V \sin \theta = -\frac{dz}{dt}$$

soit :

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = -V \sin \theta} \qquad (15)$$

En introduisant les expressions (13) (14) et (15) dans (12) on obtient :

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V^2 \sin \theta}{2} mn \frac{\rho_0}{\rho}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} = -\frac{V^2 \sin \theta}{2} mn\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/n} \qquad (16)$$

Et l'équation (3′) devient

$$P \sin \theta\left[1 + \frac{V^2}{2g} mn\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/n}\right] = Rx \qquad (3'')$$

Par rapport à l'écriture simplifiée sous la forme (3) le terme correctif est donc :

$$\frac{V^2}{2g} mn\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/n} \cong 0{,}0000049V^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{0{,}235}$$

Il est facile de voir que pour $V^2 = 1000$ par exemple le terme correctif ne dépasse pas 0,5 % aux altitudes usuelles.

La vitesse sur la trajectoire planée peut donc être exprimée avec une suffisante approximation par la relation (11).

4. Vitesse verticale de la descente planée. — La composante verticale de V est

$$w = V \sin \theta$$

L'équation (3) nous donne en la multipliant par V

$$w = V \sin \theta = \frac{Cx}{P} \frac{\rho}{2} SV^3$$

et l'équation (4) donne

$$V^2 = \frac{2P \cos \theta}{\rho CzS} \qquad \text{d'où} \qquad V^3 = \left(\frac{2P \cos \theta}{\rho CzS}\right)^{3/2}$$

Il en résulte

$$w = \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \frac{Cx}{Cz^{3/2}} \cos^{3/2}\theta \cong \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \frac{Cx}{Cz^{3/2}} \tag{17}$$

car pour les planeurs de vol à voile on considère surtout les trajectoires planées de pente modérée telles que $\cos \theta \cong 1$.

Dans le cas général on aurait en remplaçant $\cos \theta$ par sa valeur en fonction de cx/cz :

$$w = \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \frac{Cx}{Cz^{3/2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Cx^2}{Cz^2}}}\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \frac{Cx}{(Cx^2 + Cz^2)^{3/4}} \tag{18}$$

soit encore

$$w = \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \frac{Cx}{Cr^{3/2}} \qquad \text{avec} \qquad Cr = \sqrt{Cx^2 + Cz^2} \tag{18'}$$

L'incidence de vol plané qui fournira la vitesse minimum (w_m) sera celle pour laquelle $Cx/C_r^{1,5} \cong Cx/Cz^{1,5}$ est minimum. Le point C (fig. 4) représentatif de cette condition est toujours situé, sur le diagramme polaire, en dessus du point A correspondant à la trajectoire de pente minimum θm. Pour une polaire expérimentale donnée la recherche du Cz (et de la valeur de i correspondante) se limitera donc au calcul des valeurs numériques du rapport $Cx/Cz^{3/2}$ pour les valeurs de Cz_1 supérieures à Czt caractéristique de θm (Cx/Cz mim).

Le régime de vol plané correspondant à w_m est une des préoccupations primordiales du pilote d'un planeur en vue du vol à

voile. C'est en utilisant ce régime qu'il pourra effectivement utiliser *la plus petite ascendance du vent naturel* pour maintenir sa trajectoire planée effectivement horizontale et éventuellement ascendante. Les critères de performance dans ce domaine sont donc caractérisés par les facteurs :

$$\sqrt{\frac{P}{S}} \qquad \text{et} \qquad \frac{Cx}{Cz^{1,5}}$$

Remarque (1). — L'intérêt technique et sportif qui résulte des considérations ci-dessus a conduit divers auteurs à rechercher sous des formes diverses les proportions à donner à un planeur optimum en vue du vol à voile. On distingue effectivement à ce sujet les *planeurs de performance*, et les réalisations actuelles de ces appareils sont caractérisées par des valeurs importantes de l'allongement λ de l'aile (ou de $K^2\lambda$ pour la voilure complexe).

5. **Étude du régime de vitesse verticale minimum.** — Appliquons la condition pour w minimum soit :

$$\frac{d}{dCz}\left(\frac{Cx}{Cz^{3/2}}\right) = 0 = \frac{Cz^{3/2}\dfrac{dCx}{dCz} - Cx\dfrac{3}{2}Cz^{1/2}}{Cz^3} = \frac{Cz\dfrac{dCx}{dCz} - \dfrac{3}{2}Cx}{Cz^{5/2}} = 0$$

ce qui donne

$$Cz_w\left(\frac{2Cz_wS}{\pi eL_1^2}\right) - \frac{3}{2}Cx_w = 0.$$

En multipliant par S on aura successivement :

$$2\frac{Cz_w^2S^2}{\pi eL_1^2} = \frac{3}{2}Cx_wS = \frac{3}{2}f + \frac{3}{2}\frac{Cz_w^2S^2}{\pi eL_1^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{Cz_w^2S^2}{\pi eL_1^2} = \frac{3}{2}\frac{\pi}{4}F_i^2eL_1^2$$

d'où enfin

$$Cz_wS = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi F_i eL_1^2 \qquad (19)$$

La valeur de w_m correspondant sera :

$$w_m = \sqrt{\frac{2P}{\rho_0\delta}}\frac{Cx_wS}{(Cz_wS)^{3/2}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho_0\delta}}\left\{\frac{f}{(Cz_wS)^{3/2}} + \frac{(Cz_wS)^{1/2}}{\pi eL_1^2}\right\}$$

et, en remplaçant ($Cz_w S$) par sa valeur, ainsi que f, on obtient :

$$w_m = \sqrt{\frac{2P}{\rho_0 \delta}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2\pi\sqrt{27}}} \sqrt{\frac{F_i}{eL_1^2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}} \sqrt{\frac{F_i}{eL_1^2}} \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{PF_i}{\rho_0 \delta \pi e L_1^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{27}} + \sqrt[4]{3} \right\}$$

$$w_m = \sqrt{\frac{PF_i}{\rho_0 \delta \pi e L_1^2}} (0{,}438 + 1{,}316) = 1{,}754 \sqrt{\frac{PF_i}{\rho_0 \delta \pi e L_1^2}} = 2{,}8 \sqrt{\frac{PF_i}{\delta e L_1^2}}$$

Finalement on aura avec divers paramètre : F_i ; eL_1^2 ; f ; $\lambda_1 = \frac{L_1^2}{S}$:

$$\boxed{w_m = \frac{2{,}8}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{PF_i}{eL_1^2}} = \frac{3{,}16}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{P}{eL_1^2}} \sqrt{\frac{f}{eL_1^2}} = \frac{2{,}8}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{P}{S} \frac{F_i}{e\lambda_1}}} \quad (20)$$

La vitesse de vol correspondante : V_w sera donnée par

$$V_w^2 = \frac{2P \cos \theta_w}{\rho_0 \delta C z_w S} = \frac{4P \cos \theta_w}{\sqrt{3} \delta \rho_0 \pi e L_1^2 F_i} \cong \frac{4P}{\sqrt{3} \delta \rho_0 \pi e L_1^2 F_i}$$

d'où

$$V_w \cong \frac{1}{1{,}316} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \frac{2}{\sqrt{\pi \rho_0}} \sqrt{\frac{P}{eL_1^2 F_i}} = \frac{2{,}42}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{P}{eL_1^2 F_i}} = 0{,}76 V_i \quad (21)$$

Ces relations montrent l'importance des facteurs P/eL_1^2 et F_i pour l'obtention d'une vitesse minimum w_m donnée. Elles permettent la discussion sur l'influence de ces divers facteurs en effectuant les dérivations correspondantes :

$$\frac{dw_m}{dF_i}, \qquad \frac{dw_m}{d\left(\frac{P}{eL_1^2}\right)} \qquad \text{etc.}$$

Pente de la trajectoire au régime w.

On aura

$$\operatorname{tg} \theta_w = \frac{C x_w S}{C_{zw} S} = \frac{f}{C z_w S} + \frac{C z_w S}{\pi e L_1^2} = \frac{F_i}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right)$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta_w = 1{,}155 F_i} \quad (22)$$

En faisant le quotient w_m/V_w on obtient la valeur approchée

$$\sin \theta_w \simeq \frac{2{,}8}{2{,}42} F_i = 1{,}156 F_i \qquad (23)$$

REMARQUE. — Si par le point B (fig. 4), on mène B_1D perpendiculaire à OB_1, puis DE parallèle à OCz, E étant sur la direction OB_1 on a :

$$OD = OE \sin \theta ; \qquad OB_1 = OD \sin \theta = OE \sin^2 \theta$$

Il en résulte

$$w^2 = V^2 \sin^2 \theta = \frac{C^{te}}{OB^1} \sin^2 \theta = \frac{C^{te}}{OE}$$

6. Étude complémentaire du régime (t) à (Rx/Rz) = F_i minimum. — Nous avons calculé plus haut l'expression de la vitesse de vol : Vt, au régime (t) et nous venons de trouver que la vitesse de vol au régime de w minimum se relie à la vitesse : Vt par la relation simple (21).

Il en est de même en ce qui concerne les vitesses w_t et w_m.

En effet, au régime (t) on a :

$$w_t = \sqrt{\frac{2P}{\rho_0 \delta}} \left\{ \frac{f}{(Cz_t S)^{3/2}} + \frac{(Cz_t S)^{1/2}}{\pi e L_1^2} \right\} = \sqrt{\frac{PF_i}{\rho_0 \delta \pi e L_1^2}} \{ 1 + 1 \}$$

soit encore

$$w_t = \frac{3{,}19}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{PF_i}{eL_1^2}} = 1{,}14 w_m \qquad (24)$$

7. Autre expression de w à un régime quelconque V. — Soit q le rapport V/Vt, on a au régime V :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{f}{CzS} + \frac{CzS}{\pi e L_1^2} = \frac{f}{Cz_t S} \frac{Cz_t}{Cz} + \frac{Cz_t S}{\pi e L_1^2} \frac{Cz}{Cz_t} = \frac{F_i}{2} \left\{ \frac{Cz_t}{Cz} + \frac{Cz}{Cz_t} \right\}$$

$$\text{or} \quad \frac{Cz}{Cz_t} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_m} \frac{V_t^2}{V^2} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_m} \frac{1}{q^2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{w}{u} = \frac{w}{V \cos \theta} = \frac{w}{q V_t \cos \theta}$$

Il en résulte :

$$w = \frac{F_i V t}{2} \left\{ \cos \theta_m q^3 + \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta_m} \frac{1}{q} \right\} = \frac{w_t}{2 \cos^2 \theta_m} \left\{ \cos^2 \theta_m q^3 + \frac{\cos^2 \theta}{q} \right\}$$

soit enfin :

$$w = \frac{1{,}595}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{PF_i}{eL_1^2}} \left\{ q^3 + \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_m} \right)^2 \frac{1}{q} \right\} \tag{25}$$

En calculant : $dw/dq = 0$, on retrouverait w_m.

8. **Durée de la descente planée.** — L'expression de la vitesse verticale w nous donne

$$-dz = w dt = \frac{A}{\sqrt{\rho}} dt \tag{26}$$

Si nous supposons que la descente planée est effectuée dans l'atmosphère standard nous avons entre ρ et z la relation (11) que nous introduirons dans (26) ce qui donne

$$-\rho_0^{1/2}(1 - mz)^{n/2} dz = A dt \tag{27}$$

Il en résulte que le temps de la descente planée depuis l'altitude z jusqu'au sol sera :

$$tz = \int_z^0 dt = \frac{-\rho_0^{1/2}}{A} \int_z^0 (1 - mz)^{n/2} dz \tag{28}$$

On trouve

$$tz = \frac{2\sqrt{\rho_0}}{Am(n+2)} \left[1 - (1 - mz)^{\frac{n+2}{2}} \right]$$

ou encore

$$tz = \frac{2\sqrt{\rho_0}}{Am(n+2)} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{n+2}{2}} \right]$$

ou enfin en fonction de w_0 pour $z = 0$

$$tz = \frac{2}{w_0 m(n+2)} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{n+2}{2}} \right] = \frac{14.200}{w_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{0{,}735} \right] \tag{29}$$

Pratiquement pour les valeurs usuelles de z on pourra calculer tz à partir de la vitesse moyenne :

$$w_1 = \frac{w + w_0}{2} = \frac{w_0}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \right)$$

d'où :

$$tz = \frac{2z}{w_0} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}} \tag{30}$$

Exemple : soit $z = 1000$ m. et $w_0 = 1$ m. sec.
La formule (29) donnera $tz = 995$ sec.
La formule (30) donnera $tz = 976$ sec.

9. **Polaire des vitesses d'un planeur.** — Avec les approximations usuelles en ce qui concerne cos — = : les composantes u et w de V peuvent s'écrire :

$$u = V \cos \theta \cong \frac{1}{Cz^{1/2}} \sqrt{\frac{P}{S} \frac{2}{\rho}}$$

$$w = V \sin \theta \cong \frac{Cz}{Cz^{3/2}} \sqrt{\frac{P}{S} \frac{2}{\rho}}$$

le diagramme représentant u et w s'appelle polaire des vitesses d'un planeur. L'équation de cette polaire s'obtiendra en écrivant

$$\frac{w}{u} = \frac{Cx}{Cz} = \frac{f}{CzS} + \frac{CzS}{\pi e L_1^2}$$

avec

$$CzS = \frac{1}{u^2} \frac{2P}{\rho_0 \delta}$$

on aura

$$w = f \frac{\rho_0 \delta}{2P} u^3 + \frac{2P}{\rho_0 \delta \pi e L_1^2} \frac{1}{u}$$

ou encore

$$w = \frac{\pi \rho_0}{8} \frac{F_i^2 e L_1^2}{P} \delta u^3 + \frac{2}{\pi \rho_0} \frac{P}{e L_1^2} \frac{1}{u \delta}$$

$$w = \frac{\pi}{64} \frac{F_i^2 e L_1^2}{P} \delta u^3 + \frac{16}{\pi} \frac{P}{e L_1^2} \frac{1}{\delta \cdot u} \qquad (31)$$

ou enfin

$$w = \left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S} \right) \frac{\rho_0}{2} \frac{u^3 \delta}{P/S} + \frac{2}{\rho_0 \pi} \frac{P}{e L_1^2} \frac{1}{u \delta} \qquad (32)$$

La tangente à la polaire des vitesses corespond à l'angle θm.
L'influence de P/S se traduit par un déplacement de la polaire vers la droite avec une tangente commune à toutes les polaires (fig. 6) (1).

(1) Figures extraites de la note de Von A. Lippisch dans la revue *Luftfahrforshung* du 25-10-34.

L'influence de σ/S est représentée figure 7.

Enfin la figure 8 représente les polaires de 2 planeurs comportant un même w_m et des valeurs différentes de P/S et de λ.

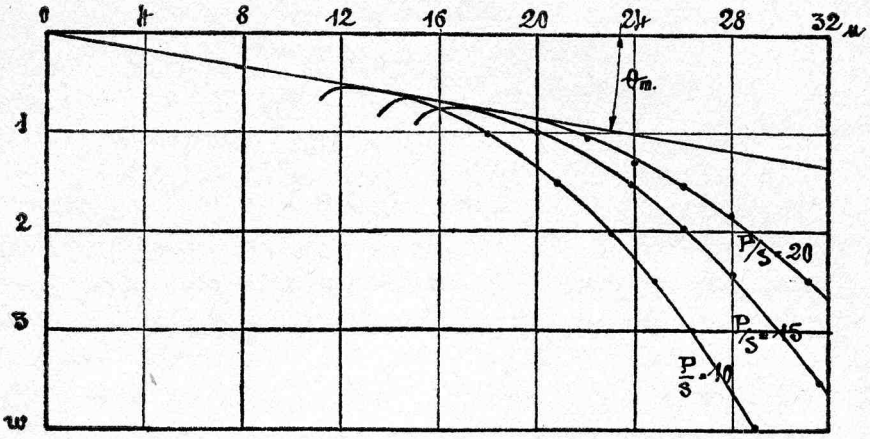


Fig. 6.

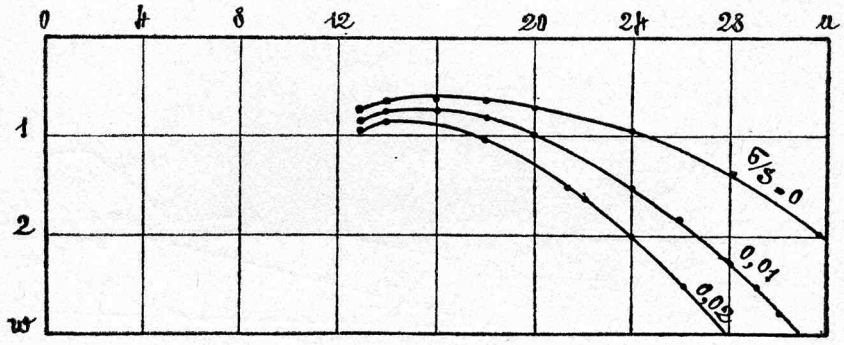


Fig. 7.

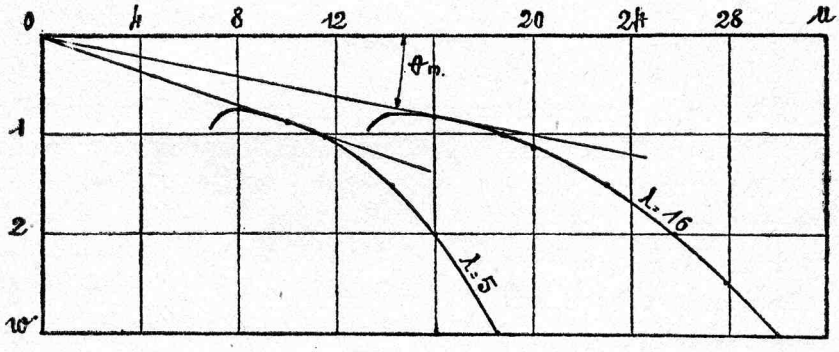


Fig. 8.

CHAPITRE II

ÉQUILIBRE ET STABILITÉ STATIQUE LONGITUDINALE D'UN PLANEUR

1. Généralités. — L'étude de l'équilibre et de la stabilité statique longitudinale d'un planeur est toujours redevable de la méthode expérimentale caractérisée par l'emploi d'une girouette aérodynamique de tangage. Cet appareil donne directement en fonction de l'incidence de référence les courbes de moment M_T par rapport aux divers centres de gravité possibles.

Il convient toutefois de faire une étude des différents facteurs qui gouvernent l'expression du moment de tangage M_T.

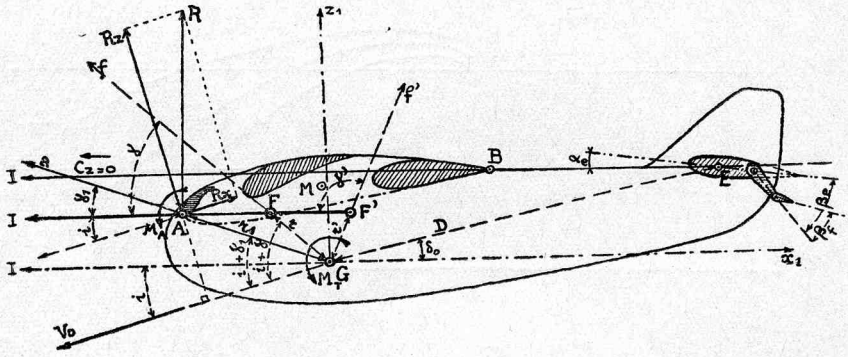


Fig. 9.

Cette étude sera limitée au cas du planeur, c'est-à-dire que nous n'y ferons pas intervenir actuellement les influences dues à la traction et au souffle des hélices propulsives. Ces influences sont éventuellement d'une influence notable, mais nous pensons qu'avant de les ajouter au cas du planeur il convient de connaître préalablement, aussi bien que possible, les conditions d'équilibre et de stabilité de ce planeur. Par ailleurs les expérimentations à la girouette se font presque toujours sur un modèle réduit ne comportant pas les hélices propulsives. Les résultats de nos calculs

seront ainsi directement comparables aux résultats expérimentaux usuels.

Soit un planeur schématisé figure 9.

Les éléments constitutifs intervenant dans l'étude actuelle sont les suivants :

1° la voilure sustentatrice constituée par les ailes S_1; S_2... S_k juxtaposées suivant une disposition quelconque ;

2° l'empennage de profondeur E ;

3° les résistances passives caractérisées par une surface fictive σ équivalente au point de vue de la grandeur de la résultante de ces résistances passives.

Soit G le centre de gravité par lequel passe l'axe GY_1 du moment de tangage résultant. Nous distinguerons dans celui-ci :

M_T : moment de tangage résultant pour le planeur complet :

$M_T(a)$: moment de tangage pour la cellule sustentatrice

$M_T(a + \sigma)$: moment de tangage pour l'ensemble : cellule + résistances passives. La valeur de $M_T(a + \sigma)$ diffère peu de la valeur expérimentale qu'on mesure aisément pour le planeur démuni de son empennage horizontal.

$M_T(e)$: moment de tangage dû principalement aux réactions sustentatrices sur l'empennage horizontal. En toute rigueur $M_T(e)$ doit comprendre en outre le moment résultant de l'empennage et le moment dû à sa résistance aérodynamique. Nous introduirons ces influences quitte à recourir plus loin aux simplifications usuelles.

D'après les définitions précédentes on aura

$$M_T = M_T(a + \sigma) + M_{Te} \qquad (1)$$

à laquelle correspond une relation analogue pour les coefficients unitaires. Ceux-ci seront rapportés à la surface S, et à la corde l_0 de l'aile fictive équivalente à la cellule réelle. Ainsi les coefficients unitaires des moments de tangage seront respectivement :

$$\left.\begin{aligned} Cm_T &= \frac{M_T}{\rho/2 V_0^2 S l_0}; \qquad Cm_T(a) = \frac{M_T(a)}{\rho/2 V_0^2 S l_0} \\ Cm_T(a + \sigma) &= \frac{M_T(a + \sigma)}{\rho/2 V_0^2 S l_0}; \qquad Cm_T(e) = \frac{M_T(e)}{\rho/2 V_0^2 S l_0} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

et l'on aura :

$$Cm_T = Cm_T(a + \sigma) + Cm_T(e) \tag{3}$$

2. Conditions d'équilibre et de stabilité longitudinale. — Sur une trajectoire rectiligne caractérisée par une incidence i, une pente θ et une vitesse constante V, les conditions d'équilibre du planeur s'obtiendront en écrivant l'égalité des forces appliquées et la nullité du moment central : M_T.

Soient Rz et Rx les composantes de la résultante aérodynamique globale.

En supposant la cellule constituée avec K ailes et en appelant $Rx_{(k)}$. $Rz_{(k)}$ les composantes pour chacune d'elles, compte tenu des interactions, et de même $Rx\ (e)$ et $Rz(e)$ les composantes pour l'empennage, on aura :

$$\left.\begin{aligned} Rx &= Rx(1) + Rx(2) + \cdots + Rx(k) + \sigma\rho/2V_0^2 + Rx(e) \\ Rz &= Rz(1) + Rz(2) + \cdots + Rz(k) + Rz(e) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Soit P le poids total du planeur.

Les conditions d'équilibre longitudinal seront :

$$\left.\begin{aligned} Rx &= P \sin\theta \\ Rz &= P \cos\theta \\ M_T &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ou encore en passant aux coefficients unitaires rapportés à S et à l_0

$$\left.\begin{aligned} Cx &= \frac{P \sin\theta}{\rho/2V_0^2S} \\ Cz &= \frac{P \cos\theta}{\rho/2V_0^2S} \\ Cm_T &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

cette dernière condition peut s'écrire

$$-C(m_T a + \sigma) = Cm_T(e) \tag{7}$$

laquelle exprime que le moment unitaire dû à l'empennage doit être égal au moment unitaire $Cm_T\ (a + \sigma)$ changé de signe. Cette condition fournira la valeur de l'incidence i, en fonction du braquage β_e des gouvernails mobiles de l'empennage. Pour cette incidence la pente θ et la vitesse V résulteront des deux autres équations.

Condition de stabilité statique longitudinale. — Elle sera donnée par les relations :

$$\frac{dM_T}{di} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dCm_T}{di} > 0 \tag{8}$$

ces relations expriment que la pente de la courbe (Cm_T, i) doit être positive au voisinage de l'incidence pour laquelle on a $Cm_T = 0$.

3. **Moment de tangage dû à la cellule sustentatrice et aux résistances passives.** — Comme il a été dit plus haut l'ensemble des moments $M_T(a)$ et $M_T(\sigma)$ correspondra, pratiquement, au moment résultant pour le planeur démuni de son empennage horizontal. Ce sera donc aussi le moment de tangage pour un « planeur sans queue » dont un cas particulier est l' « aile volante ».

Pour cette étude particulière nous distinguerons les deux cas suivants :

1° Les caractéristiques aérodynamiques de la cellule et des résistances passives sont rapportées, en ce qui concerne le moment longitudinal, à un axe transversal fréquemment voisin du bord d'attaque : A. Les résultats des mesures faites avec la balance aérodynamique sont généralement rapportés à un tel axe. Pour une aile monoplane l'expression analytique de $M_{(A)}$ est particulièrement simple.

2° Les caractéristiques aérodynamiques de la cellule et des résistances passives sont rapportées, en ce qui concerne le moment longitudinal, à un axe transversal passant par un point (privilégié) appelé *Foyer résultant F.*

4. **Cas de la référence initiale des moments de tangage à un axe transversal A voisin du bord d'attaque de la voilure.** — La position du centre de gravité G sera alors caractérisée par rapport à la position du point A de la manière suivante (fig. 9) :

Par A on tracera la direction $\vec{AI}$, parallèle à la direction de portance nulle de la voilure et l'on définira l'angle γ_1 qui font les directions $\vec{AI}$ et $\vec{GA}$. γ_1 sera toujours compté à partir de $\vec{AI}$ vers $\vec{GA}$ dans le sens des incidences positives. Par ailleurs G sera situé en position par la longueur $|\,GA\,| = r_1 = |\,AG\,|$.

Le système aérodynamique résultant pour la voilure seule, dans ce premier cas, se ramène à une résultante $R(a)$, passant par A,

et au moment longitudinal $M_{(A)}$. Soient Rz et Rx les composantes habituelles de $R(a)$, alors on aura pour le moment de tangage en G :

$$M_T = M_{(A)} - Rz\, r_1 \cos(i + \gamma_1) - Rx\, r_1 \sin(i + \gamma_1). \qquad (9)$$

Il en résulte :

$$Cm_T = Cm_{(A)} - Cz \frac{r_1}{l_0} \cos(i + \gamma_1) - Cx \frac{r_1}{l_0} \sin(i + \gamma_1). \qquad (10)$$

L'expression ci-dessus est particulièrement commode pour le calcul de Cm_T à partir des résultats expérimentaux habituels : $Cm_{(A)}$; Cx ; Cz ; même lorsque ces divers coefficients se rapportent à des incidences i pour lesquelles les courbes unitaires s'écartent notablement de leur allure normale.

Pour le *planeur sans empennage* l'expression ci-dessus reste valable à condition de prendre les nouvelles valeurs correspondantes de $Cm_{(A)}$, Cz et Cx. Le coefficient unitaire Cx est généralement peu modifié. Le coefficient unitaire Cz est augmenté, du fait des résistances passives. Celles-ci sont généralement évolutives avec l'incidence.

Nous admettrons que cette évolution peut être incluse dans celle qui correspond à la résistance induite de la cellule. Dans ces conditions nous pourrions écrire pour une polaire présentant son minimum de Cx à une sustentation Cz_0 différente de zéro :

$$Cx(a + \sigma) = Cx_0 + \frac{\sigma}{S} + \frac{(Cz - Cz_0)^2}{\pi k^2 \lambda} \qquad (11)$$

Cependant l'allure de la polaire en dessous de Cz_0 ne sera pas en général symétrique de la courbe située au-dessus de Cz. C'est pourquoi il paraît préférable d'adopter la relation (11) en y faisant $Cz_0 = 0$, c'est-à-dire :

$$Cx(a + \sigma) = Cx_0 + \frac{\sigma}{S} + \frac{Cz^2}{\pi k^2 \lambda}. \qquad (12)$$

On déterminera la valeur du facteur de résistance induite $1/k^2\lambda$ en représentant la polaire expérimentale sous la forme Cx = fonction de Cz^2 et l'on aura

$$\frac{1}{\pi k^2 \lambda} = \frac{dCx}{dCz^2}.$$

Le moment résultant pour la cellule seule quand elle est assimilable à une aile peut s'écrire, aux incidences modérées :

$$Cm_A(a) = \frac{AF}{l_0} Cz + Cm_0 = \varphi Cz + Cm_0 \qquad (13)$$

avec

$$\frac{AF}{l_0} = \varphi \simeq 0{,}25 \text{ à } 0{,}26$$

dans le cas des ailes rectangulaires.

Pour le planeur sans empennage horizontal l'*expérience* montre (fréquemment) que l'influence des résistances passives se traduit seulement par des nouvelles valeurs de φ et de Cm_0 ; soient

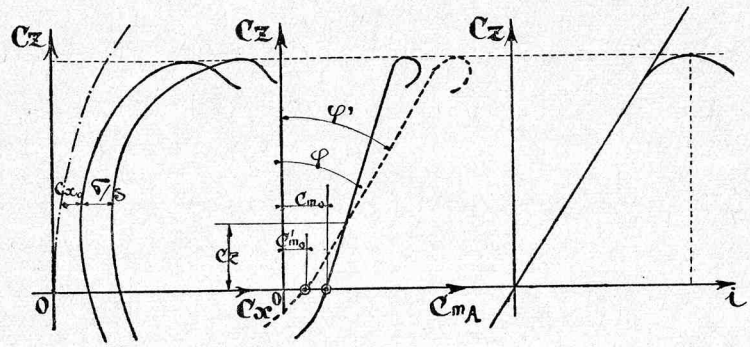


Fig. 10.

φ' et $C'm_0$ ces valeurs, on aura donc (fig. 10) :

$$Cm_A(a + \sigma) = \varphi' Cz + C'm_0. \qquad (13')$$

En complément des représentations analytiques approximatives proposées en ce qui concerne Cx, $Cm_{(A)}$ et $C'm_{(A)}$ nous introduirons maintenant l'expression usuelle de (Cz,i) aux incidences modérées ; soit :

$$Cz = a \sin i \simeq ai \qquad (14)$$

dans laquelle :

$$a = \frac{dC_z}{di}$$

sera déduit préférablement des courbes expérimentales (Cz,i) pour la cellule sustentatrice. A défaut de ces données on pourra calculer : a, pour des ailes monoplanes sensiblement rectangulaires, par les relations ci-après

$$a = 0{,}85 \times 2\pi(1 + \eta e) \frac{\lambda}{\lambda + 2(1 + \eta e)}$$

dans laquelle le facteur 0,85 tient compte du rapport habituellement observé entre les sustentations expérimentales et théoriques.

Pour une valeur moyenne de

$$(1 + \tau e) = 1{,}1 \qquad \text{soit} \qquad \text{pour } e \cong 0{,}14,$$

on obtient :

$$a \cong 5{,}9 \frac{\lambda}{\lambda + 2{,}2} (i \text{ en radians}) \qquad \text{ou} \qquad a \cong 0{,}105 \frac{\lambda}{\lambda + 2{,}2} (i \text{ en degrés})$$

Compte tenu des expressions simplifiées adoptées pour Cx, $C'm_A$ et Cz, on aura :

$$Cm_T(a + \sigma) = \varphi' Cz + C'm_0 - Cz \frac{r_1}{l_0} \cos(i + \gamma_1) - Cx \frac{r_1}{l_0} \sin(i + \gamma_1). \quad (15)$$

En développant et remplaçant sin i par i et cos i par 1 on obtient :

$$\begin{aligned} Cm_T(a + \sigma) = &- a^2 r_1 \cos\gamma_1 i^3 + a r_1 \sin\gamma_1 \left[1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right] i^2 + \\ &- \frac{a r_1 \cos\gamma_1}{l_0} \left[1 + \frac{1}{a}\left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right) - \varphi' \frac{l_0}{r_1 \cos\gamma_1}\right] i + \\ &+ C'm_0 - \frac{r_1 \sin\gamma_1}{l_0} \left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Ces relations sont valables seulement aux incidences modérées et pratiquement pour $i \leq 0{,}25$ radians. Le terme en i^3 qui provient de la projection sur Gz_1 du vecteur correspondant à la résistance induite sera généralement négligeable. Il en résulte que dans le domaine des *incidences modérées* l'expression $Cm_T\ (a + \sigma)$ est du second degré en i.

Nous aurons dans ces conditions :

$$\begin{aligned} Cm_T(a + \sigma) \cong &\frac{a r_1 \sin\gamma_1}{l_0} \left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) i^2 + \\ &- \frac{a r_1 \cos\gamma_1}{l_0} \left[1 + \frac{1}{a}\left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right) - \varphi' \frac{l_0}{r_1 \cos\gamma_1}\right] i + \\ &+ C'm_0 - \frac{r_1 \sin\gamma_1}{l_0} \left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right) = Ai^2 - Bi + C \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dCm_T(a+\sigma)}{di} \cong &\frac{2 a r_1 \sin\gamma_1}{l_0} \left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) i + \\ &- \frac{a r_1 \cos\gamma_1}{l_0} \left[1 + \frac{1}{a}\left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right) - \varphi' \frac{l_0}{r_1 \cos\gamma_1}\right] = 2Ai - B \end{aligned} \quad (18)$$

Les incidences d'équilibre seront données par les racines de l'équation :

$$Cm_T(a + \sigma) = 0.$$

Application numérique. — Soit une aile rectangulaire dont les courbes expérimentales obtenues à la balance sont représentées

figure 11. Pour le domaine des *incidences modérées* nous relevons les caractéristiques suivantes (1) :

$a^0 = 0{,}074$; $a = 4{,}23$; $\lambda = 7{,}5$; $Cx_0 = 0{,}026$;

$k_2\lambda = 6{,}5$; $\dfrac{a}{\pi k^2\lambda} = 0{,}208$; $i^0 = \alpha^0 + 7^0$; $Cm_0 = 0{,}055$;

$\varphi = 0{,}252$; $1 - \dfrac{a}{\pi k^2\lambda} = 0{,}792$; $1 + \dfrac{Cx_0}{a} = 1{,}006$;

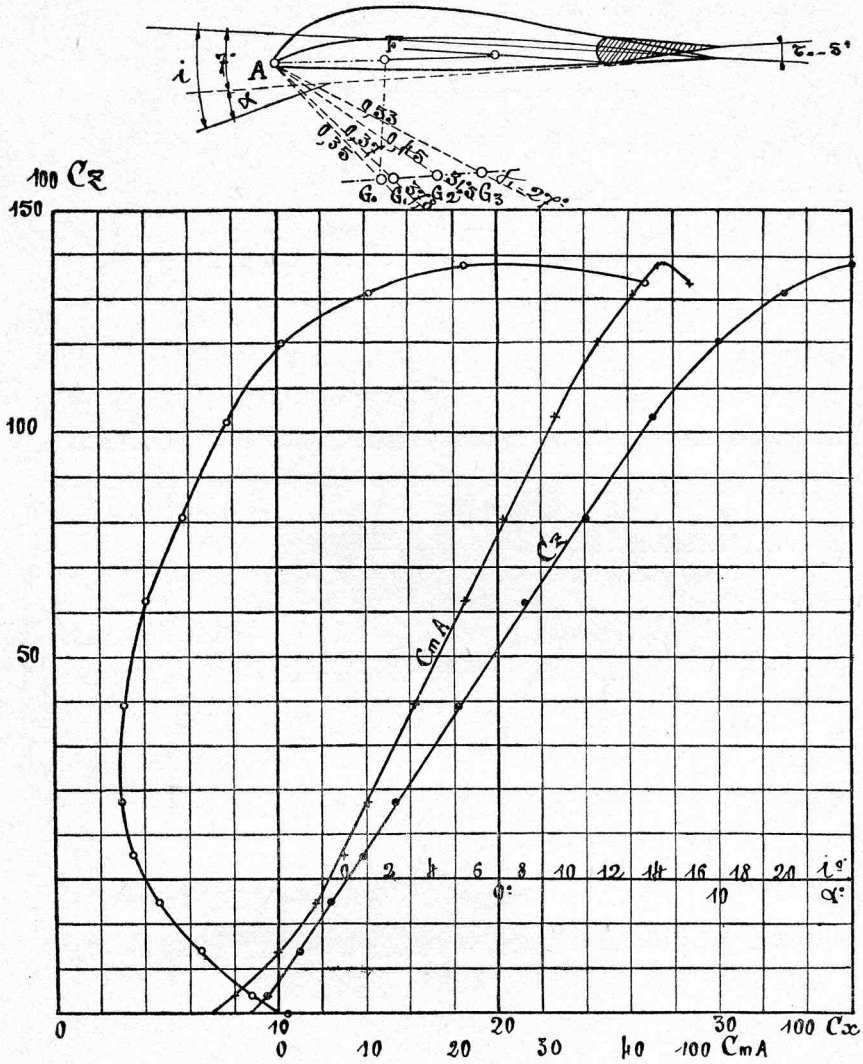


Fig. 11.

(1) L'application se réfère aux expériences décrites dans le *Bulletin technique* n° 66 du S. T. Aé.

Considérons 3 positions du centre de gravité G caractérisées par les valeurs de r_1/l_0 et de γ_1 indiquées dans le tableau ci-dessous :

r_1/l_0	0,37	0,45	0,53
γ_1	41°2	31°5	24°5
$a\frac{r_1}{l_0}\sin\gamma_1$	1,027	0,992	0,93
$a\frac{r_1}{l_0}\cos.\gamma_1$	1,18	1,62	2,035
$\varphi l_0/r_1\cos\gamma_1$	0,904	0,655	0,522

Nous en déduisons les trois expressions de Cm_T (a)

G_1) $\quad Cm_T(a) = 0{,}813\ i^2 - 0{,}12\ i + 0{,}0487$

G_2) $\quad Cm_T(a) = 0{,}788\ i^2 - 0{,}568\ i + 0{,}0489$

G_3) $\quad Cm_T(a) = 0{,}740\ i^2 - 1{,}005\ i + 0{,}0493,$

à l'aide desquelles on calcule sans difficultés les valeurs de Cm_T (a) pour les incidences modérées. Le tableau ci-dessous donne les résultats calculés.

i	0	0,1	0,2	0,3
$i°$	0	5°73	11°46	17°2
$\alpha°$	— 7	— 1°27	4°46	10°2
G_1) 100 Cm_T (a)	4,87	4,48	5,7	8,6
G_2) id.	4,89	0,008	— 3,30	— 5,04
G_3) id.	4,93	— 4,38	— 12,21	— 18,56

En complément des calculs précédents il convient de calculer spécialement les valeurs de Cm_T (a) pour une incidence négative et pour l'incidence correspondant à Cz max. Les données correspondantes sont indiquées ci-après :

1° $\alpha = 16°$; $\quad i = 23°$; $\quad Cz_{max} = 1{,}375$; $Cx = 0{,}185$; $Cm_A = 0{,}43$;

2° $\alpha = -12°5$; $i = -5°5$; $Cz = 0{,}341$; $Cx = 0{,}120$; $Cm_A = -0{,}108$;

En appliquant la formule (10) on obtient respectivement pour G_1, G_2 et G_3 :

1° $\alpha = 16°$; $\quad i = 23°$; $\quad 100\,Cm_T = 14{,}7$; $\quad 0{,}2$; $\quad -13{,}4$

2° $\alpha = -12°5$; $i = -5°5$; $100Cm_T = -3{,}12$; $\quad 0{,}6$; $\quad 4{,}2$

Ces résultats sont représentés graphiquement figure 12. Les

portions pointillées raccordent les courbes calculées pour les incidences modérées aux valeurs calculées pour les deux incidences particulières $i = 23^{o}$ et $i = -5^{o},5$. On voit que pour un centre de gravité se déplaçant sur une parallèle à la corde de référence (corde

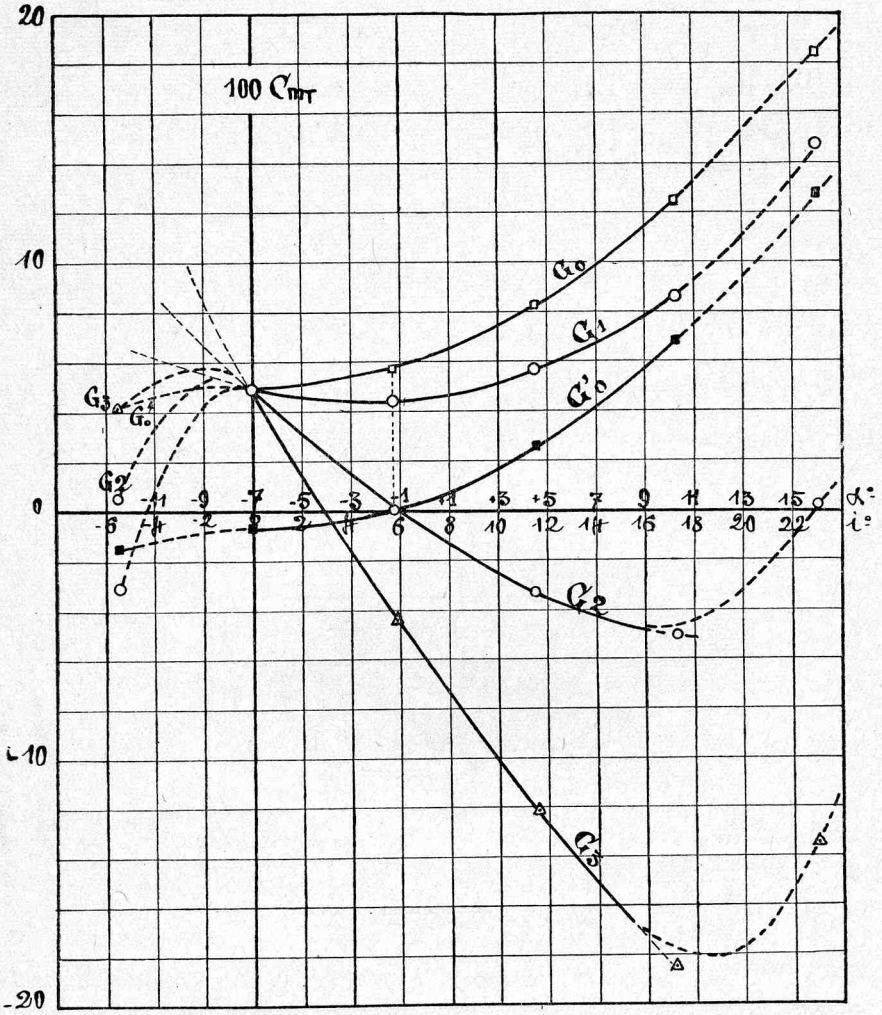


Fig. 12.

d'intrados) toutes les courbes Cm_T (a) admettent un point commun. Pour la position G_1 on n'a pas d'équilibre possible aux incidences normales positives. Pour les positions G_2 et G_3 les incidences normales d'équilibre sont respectivement $i_2 = 5^{o}9$ et $i_3 = 2^{o},9$, mais ces équilibres sont instables d'autant plus notablement que le centre de gravité est plus en arrière.

REMARQUE. — L'influence du terme en i^3 peut être calculée pour l'application numérique précédente. On trouve respectivement

$$-\frac{a^2 r_1 \cos\gamma_1}{\pi k^2 \lambda l_0} = -0{,}2455 \qquad -0{,}337 \qquad \text{et} -0{,}423$$

Si on calcule $Cm_T\,(a)$ pour diverses valeurs de i on trouve que l'erreur commise en négligeant le terme en i^3 est de — 1 % pour $i = 0{,}1$; — 3 % pour $i = 0{,}2$ et — 6 à 7 % pour $i = 0{,}3$.

5. **Centrage limite pour un planeur sans empennage.** — On pourrait définir un *centrage limite* tel que pour $i = 0$ on ait :

$$\left(\frac{dCm_T}{di}\right)_{i=0} = 0.$$

Cette condition s'écrit en général :

$$B = \frac{a r_1 \cos\gamma_1}{l_0}\left[1 + \frac{1}{a}\left(Cx_0 + \frac{\sigma}{s}\right)\right] - a\varphi' = 0 \qquad (19)$$

ce qui donne :

$$\frac{r_1 \cos\gamma_1}{l_0} = \frac{x_1}{l_0} = \frac{\varphi'}{1 + \frac{1}{a}\left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right)} \qquad (19')$$

Dans le cas particulier traité plus haut on aura donc :

$$\frac{r_1 \cos\gamma_1}{l_0} = \frac{0{,}252}{1{,}006} = 0{,}25$$

Le point G_o correspondant comportera $r_1/l_o = 0{,}355$ et $\gamma_1 = 45^o$ et l'on aura :

$$Cm_T(a) = 0{,}840 i^2 + 0{,}0485$$

d'où l'on déduit les valeurs correspondantes pour les incidences modérées.

Au Cz max, le calcul par (10) donne $100\ Cm_T\,(a) = 18{,}65$. Au $Cz = -0{,}341$ le calcul par (10) donne : $100\ Cm_T\,(a) = -4{,}2$.

On en déduit le tracé de la courbe G_o qui présente une tangente horizontale en $i = 0$.

Pour réaliser un planeur stable avec l'aile envisagée il faudra placer le centre de gravité en G_o ou en avant de G_o ; mais, en outre pour obtenir des positions d'équilibre aux incidences modérées

et positives il faudra *modifier le terme constant C*. Ainsi pour G placé en G_o on aura l'équilibre en $i = +0{,}1$ ($5^o{,}73$) en faisant :

$$0{,}840 \times 0{,}01 + C'm_0 - 0{,}355 \times 0{,}707 \times 0{,}026 = 0$$

ce qui donne :

$$C'm_0 = -0{,}0019.$$

Il faudra donc modifier le profil de l'aile pour obtenir cette valeur négative de $C'm_o$. Si on adapte un aileron de courbure intéressant toute l'envergure et, caractérisé par une corde relative $c/l = 0{,}25$ le braquage négatif : τ que l'on devra donner à cet aileron sera calculé au § 6 qui utilise les relations classiques de l'aile associée à un aileron de courbure.

6. **Planeur sans empennage mais avec aileron de courbure.** — Pour un braquage τ de l'aileron de courbure de même envergure que l'aile, nous devons modifier comme suit les expressions de Cz, Cm_A et de $Cm_T\,(a + \sigma)$.

L'expression de la sustentation devient :

$$C'z = a(i + \Delta\beta) = a(i + m\tau) \qquad (14')$$

avec :

$$m \cong 1{,}27\sqrt{\sigma}(1 - 0{,}2\sigma) \qquad \text{et} \qquad \sigma = c/l.$$

L'expression de $Cm_{(A)}$ devient

$$C'm_A = \varphi' C'z + C'm_0 + \Delta C'm_0 \qquad (13'')$$

avec

$$\Delta C'm_0 = \mu\tau \qquad \text{et} \qquad \mu = \sqrt{\sigma(1-\sigma)^3}.$$

L'expression de $Cm_T\,(a + \sigma)$ devient :

$$\left.\begin{aligned} C'_{mT(a+\sigma)} = {} & \varphi' a(i + m\tau) + C'm_0 + \mu\tau - a(i + m\tau)\frac{r_1 \cos(i+\gamma_1)}{l_0} \\ & - \left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right)\frac{r_1 \sin(i+\gamma_1)}{l_0} - a^2(i+m\tau)^2 \frac{r_1 \sin(i+\gamma_1)}{\pi k^2 \lambda l_0} \end{aligned}\right\} \qquad (15')$$

En développant comme pour la formule (15) on retrouvera tous les termes de $Cm_T\,(a + \sigma)$ et des termes nouveaux provenant du braquage τ. Finalement on peut écrire

$$C'_{mT(a+\sigma)} = Cm_{T(a+\sigma)} + \Delta Cm_{T(\tau \neq 0)} \qquad (16')$$

avec :

$$\left.\begin{aligned}\Delta Cm_{T(\tau \neq 0)} = {} & \tau\left(\varphi' am - \frac{amr_1 \cos \gamma_1}{l_0} + \mu\right) \\ & + i\tau \frac{amr_1 \sin \gamma_1}{l_0}\left(1 - \frac{2a}{\pi k^2 \lambda}\right) - \frac{\tau^2 a^2 m^2 r_1 \sin \gamma_1}{\pi k^2 \lambda l_0} \\ & - i^2\tau \frac{a^2 m r_1 \cos \gamma_1}{\pi k^2 \lambda l_0} - i\tau^2 \frac{a^2 m^2 r_1 \cos \gamma_1}{\pi k^2 \lambda l_0}\end{aligned}\right\} \quad (16'')$$

L'étude de la stabilité d'un planeur sans empennage comportant l'utilisation d'un volet de courbure *doit* être faite d'après les équations (16′) et (16″), si le volet de courbure ne comporte aucune association avec un « compensateur » de moment de charnière.

Suite de l'application numérique. — Le centrage limite comporte la condition (19′) qui, pour le planeur sans empennage suffisamment analogue au planeur « aile volante » se réduit à la condition :

$$\frac{r_1 \cos \gamma_1}{l_0} = \left(\frac{x_1}{l_0}\right)_l = \varphi' \qquad \text{avec} \qquad 1 + \frac{Cx_0 + \sigma/S}{a} \simeq 1.$$

L'expression (16″) de $\Delta Cm_T(a + \sigma)$ pour $\tau \neq 0$, en se limitant aux termes en τ^2 et en $i\tau$ devient :

$$\Delta Cm_{T(\tau \neq 0)} \simeq \tau\left[\mu + i \frac{amr_1 \sin \gamma_1}{l_0}\left(1 - \frac{2a}{\pi k^2 \lambda}\right)\right] - \tau^2 \frac{am^2}{\pi k^2 \lambda} \cdot \frac{ar_1 \sin \gamma_1}{l_0},$$

En appliquant au cas concret précédemment étudié nous devons réaliser pour $i = 0{,}1$.

$$\Delta C_{mT} = C'_{m0} - Cm_0 = -0{,}0019 - 0{,}055 = -0{,}0569.$$

La valeur de τ nécessaire pour cet équilibre sera donnée par l'équation

$$-0{,}0569 = \Delta Cm_{T(\tau \neq 0)}.$$

En mettant dans l'expression de ΔCm_T les valeurs numériques précédemment calculées, on obtient l'équation :

$$-0{,}0569 = 0{,}688\tau - 0{,}0795\tau^2$$

ou encore

$$\tau^2 - 8{,}65\tau - 0{,}75 = 0.$$

Ce qui donne

$$\tau = -0{,}080 \text{ radians} \qquad \text{soit} \qquad \tau^0 = -4^0{,}60.$$

Dans ces conditions on aura la courbe G'_0 figure 12, qui comporte l'équilibre pour $i = 0{,}1 = 5^0{,}73$, l'équilibre est stable avec

$$\frac{dCm_T}{di}(a) = 2 \frac{ar_1 \sin \gamma_1}{l_0}\left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) 0{,}1 = 0{,}167$$

On vérifierait aisément que l'incidence d'équilibre

$$i = 0{,}2 \quad \text{soit} \quad (11°{,}46)$$

sera obtenue avec la valeur $100\ \Delta\ Cm_o = -\ 8{,}21$ ce qui donne $\tau^o = -\ 6^o$.

Il résulte de ce qui précède que le vol aux incidences positives voisines de celles qui donne le Cz maxi *impose un profil à Cmo négatif*. On ne peut donc pour un *planeur sans queue* utiliser l'aileron de courbure comme dispositif hypersustentateur, même avec un centrage situé en avant de la position limite G_0.

7. Foyer résultant pour un planeur sans empennage. — Par analogie avec la définition du foyer d'un profil d'aile on appellera

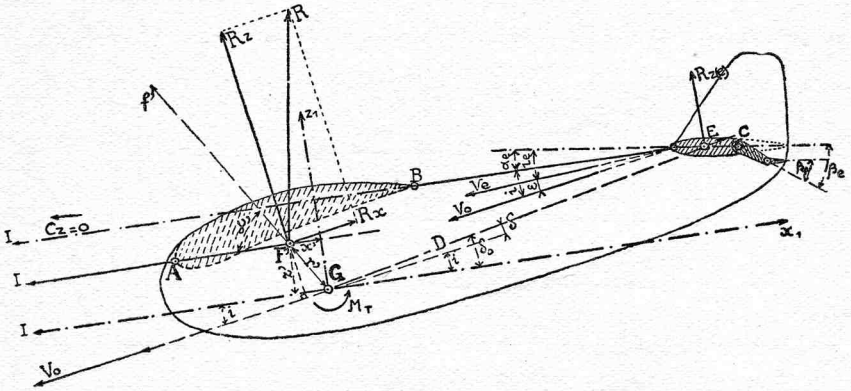


Fig. 13.

foyer résultant du planeur sans empennage un point F′ tel que le moment de tangage par rapport à ce point soit indépendant de l'incidence *i*. Pour qu'il en soit ainsi il faut que pour ce point F′ on ait :

$$\left.\begin{aligned} \sin \gamma'_1 = \gamma'_1 &= 0 \\ \frac{r'_1}{l_0} &= \frac{\varphi'}{1 + \frac{1}{a}\,(Cx_0 + \sigma/S)} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Donc F′, figure 13, est situé sur la direction AI parallèle à la direction de partance nulle à la distance.

$$AF' = r'_1.$$

Dans le cas d'une aile rectangulaire sans résistances passives on retrouverait ainsi, sensiblement, le foyer F du profil de l'aile.

En tous cas pour le point F′ que nous venons de définir le moment résultant est constant et égal au Cm_o du planeur sans empennage.

8. **Cas de la référence initiale des moments de tangage à un axe transversal passant par le foyer résultant F′.** — La position de G sera alors caractérisée par rapport à F′ par la distance $F'G = r'$ et par l'angle γ' avec les mêmes conventions que pour γ. Le système aérodynamique résultant pour le planeur comporte : $\vec{R}$ passant par F′, avec $CmF' = C'm_o$. On aura donc par rapport à G :

$$Cm_T(a + \sigma) = C'm_0 - Cz\frac{r'}{l_0}\cos(i + \gamma') - Cx\frac{r'}{l_0}\sin(i + \gamma'). \tag{20}$$

En remplaçant Cz et Cx par les valeurs adoptées plus haut et en développant on trouve :

$$\left.\begin{aligned} Cm_T(a + \sigma) = &-\frac{a^2 r' \cos\gamma'}{\pi k^2 l_0 \lambda} i^3 + \frac{ar' \sin\gamma'}{l_0}\left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) i^2 + \\ &- \frac{ar' \cos\gamma'}{l_0}\left(1 + \frac{Cx_0 + \sigma/S}{a}\right) i + C'm_0 + \\ &- \frac{r' \sin\gamma'}{l_0}(Cx_0 + \sigma/S) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Comme précédemment nous négligerons pratiquement le terme en i^3 et nous aurons ainsi successivement :

$$\begin{aligned} Cm_T(a + \sigma) = &\frac{ar' \sin\gamma'}{l_0}\left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) i^2 - \frac{ar' \cos\gamma'}{l_0}\left(1 + \frac{Cx_0 + \sigma/S}{a}\right) i \\ &+ C'm_0 - \frac{r' \sin\gamma'}{l_0}(Cx_0 + \sigma/S) \end{aligned} \tag{22}$$

$$\frac{dCm_T(a + \sigma)}{di} = \frac{2ar' \sin\gamma'}{l_0}\left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) i - \frac{ar' \cos\gamma'}{l_0}\left(1 + \frac{Cx_0 + \sigma/S}{a}\right) \tag{23}$$

$$\frac{d^2 Cm_T(a + \sigma)}{di^2} = \frac{2ar' \sin\lambda'}{l_0}\left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) \tag{24}$$

Discussion. — En caractérisant l'influence de la position de G par rapport à F′ par l'influence de l'angle γ' on établit aisément les résultats suivants. Pour un planeur sans empennage dont le centre de gravité G décrit un demi-cercle de rayon r' à partir de $G_o(\gamma' = 0)$ jusqu'à $G(\pi)$ $(\gamma' = \pi)$ les courbes caractéristiques évoluent comme il est indiqué figure 14 (pour simplification on a sup-

posé que le terme constant de $Cm_T\,(a + \sigma)$ est toujours nul de sorte que les courbes correspondantes passent par l'origine). On voit que le centrage limite correspond à $\gamma = \pi/2$.

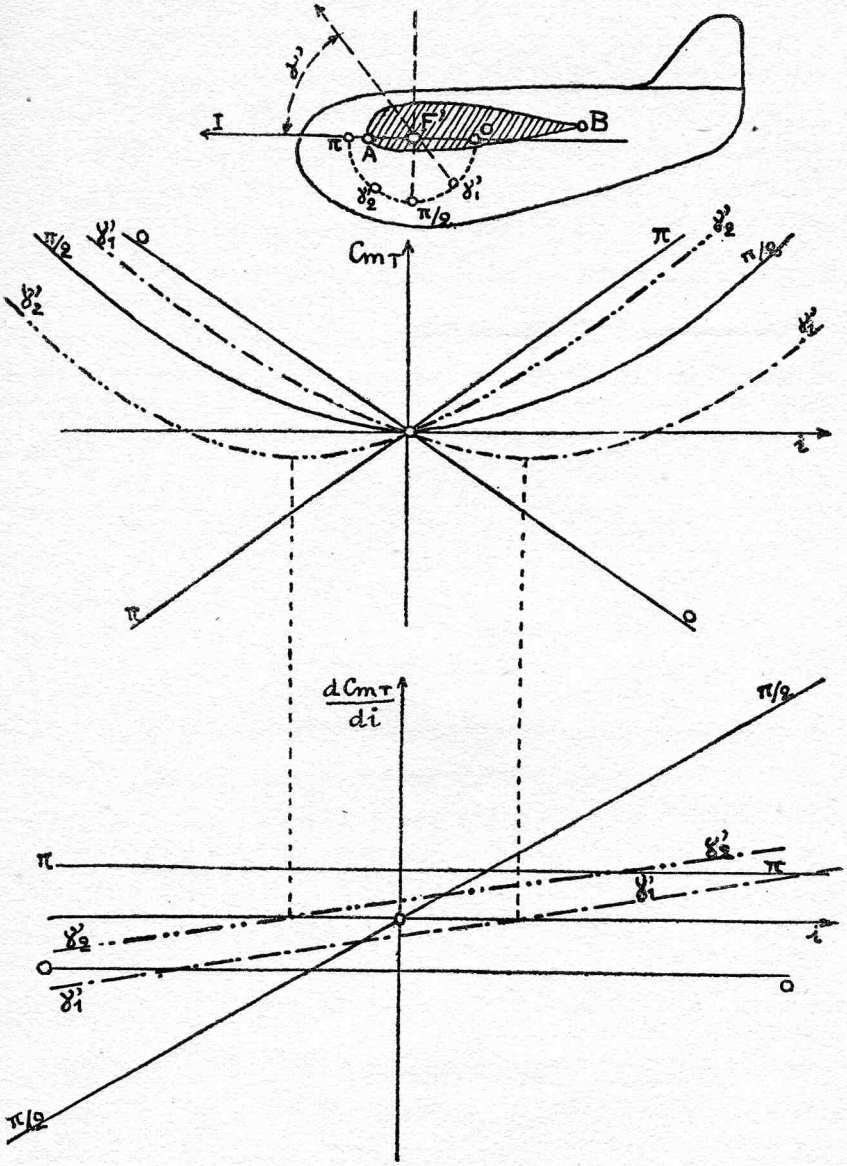


Fig. 14.

Pour G se déplaçant depuis $\gamma' = \pi$ jusqu'à $\gamma' = 3\pi/2$ on observerait la possibilité d'obtenir des équilibres stables aux incidences positives modérées associée avec une instabilité aux

grandes incidences. Le planeur avec centre de gravité surélevé comporte donc une limite de centrage beaucoup plus réservée et voisine de $\gamma' = \pi$ car pour $\gamma' = 3\pi/2$ on ne peut avoir aucun équilibre stable aux incidences positives même modérées.

Gouverne longitudinale. — Les modifications de l'incidence d'équilibre seront obtenues en agissant sur le terme constant de $Cm_T\ (a + \sigma)$.

Pour un équilibre stable aux incidences positives ce terme doit être négatif. Ce résultat pourra être obtenu en déformant le profil par le braquage négatif d'un aileron de courbure (comme il a été montré plus haut) ou bien en agissant sur le terme en $(Cx_o + \sigma/S)$.

REMARQUE. — Les expressions (22) et (23) obtenues en adoptant la référence du foyer résultant F' seront d'un emploi plus commode dans la suite de notre étude. Nous les adopterons donc désormais. Toutefois pour le calcul direct de certains points particuliers correspondant à des caractéristiques Cx, Cz, Cm_A s'écartant notablement des formules adoptées on devra recourir à la relation (10).

9. **Moment de tangage dû à l'empennage.** — L'incidence effective au droit de l'empennage sera :

$$i_e = i + \alpha_e - \varepsilon \qquad (25)$$

α_e : étant le calage du plan fixe par rapport à la corde de référence des incidences i.

ε ; étant l'angle total de déflexion au foyer de l'empennage.

La vitesse efficace Ve au droit de l'empennage sera en général différente de Vo par suite de l'*effet de sillage* des ailes sustentatrices.

Nous supposerons que l'empennage comporte *deux portions mobiles* : l'une appelée *gouvernail* ou *équilibreur* et l'autre appelée *flettner* ou *compensateur*.

Nous caractériserons ces divers organes par les symboles suivants :

Empennage total, surface : Se ; allongement : λe; sustentation : $Cz(e)$; pente : a_e ; incidence : ie ; calage : α_e.

Gouvernail ou équilibreur, surface (y compris le compensateur) : Sem ; ou $\sigma e = \dfrac{Sem}{Se}$; corde lem ; braquage : βe ; moment de charnière . M_c ou Cmc.

Flettner ou compensateur : Surface : S_f ou $\sigma_f = Sf/Se$; corde lf; braquage : βf.

La liaison du compensateur avec le gouvernail sera supposée telle que :

$$\beta_f = \beta_{f0} - r\beta_e \tag{26}$$

La sustentation de l'empennage total sera :

$$Rz_e = Cz_e S_e \rho / 2V_e^2 \tag{27}$$

avec :

$$Cz_e = a_e \sin (i_e + m_1\beta_e + m_2\beta_f) \tag{27'}$$

dans laquelle on a :

$$a_e = \frac{dCz_e}{di_e} = \frac{5{,}7\lambda_e}{\lambda_e + 2{,}2} \qquad (i_e \text{ en radians})$$

$$= \frac{0{,}1\lambda_e}{\lambda_e + 2{,}2} \qquad (i_e \text{ en degrés})$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &\cong 1{,}27\sqrt{\sigma_e}\,(1 - 0{,}2\sigma_e) \\ m_2 &\cong 1{,}27\sqrt{\sigma_f}\,(1 - 0{,}2\sigma_f) \end{aligned}\right\} \text{ pour } \beta_e \text{ et } \beta_f \text{ modérés}$$

La résistance de l'empennage sera :

$$Cx_e = Cx_0 + \frac{Cz_e^2}{\pi k^2 \lambda_e} \tag{28}$$

Le moment résultant sur l'empennage par rapport au foyer E sera :

$$Cm_{0e} = \mu_e\beta_e + \mu_f\beta_f \tag{29}$$

en supposant un profil biconvexe symétrique, avec :

$$\left.\begin{aligned} \mu_e &= 2\sqrt{\sigma_e(1 - \sigma_e)^3} \\ \mu_f &= 2\sqrt{\sigma_f(1 - \sigma_f)^3} \end{aligned}\right\}$$

Soit D, la distance GE et $\delta = \delta o - i$ l'angle de $\overrightarrow{GE}$ avec $\overrightarrow{Vo}$ (fig. 13).

Le moment de tangage dû à l'empennage ainsi défini sera :

$$M_{T(e)} = Rz_{(e)}D\cos\delta + M_{0e} - Rx_0 D\sin\delta \tag{30}$$

Le coefficient unitaire correspondant sera

$$C_{mT(e)} \cong Cz_e\left(\frac{V_e}{V_0}\right)^2\frac{S_e D\cos\delta}{Sl_0} + Cm_{0e}\left(\frac{V_e}{V_0}\right)^2\frac{S_e l_e}{Sl_0} - Cx_e\left(\frac{V_e}{V_0}\right)^2\frac{S_e D\sin\delta}{Sl_0} \tag{31}$$

Fréquemment on néglige les termes en $Cmoe$ et en Cxe et l'on écrit simplement

$$Cm_T(e) \cong a_e\left(\frac{V_e}{V_0}\right)^2 \frac{S_e D \cos\delta}{Sl_0}\,[i + \alpha_e - \varepsilon + m_2\beta_{fo} + (m_1 - rm_2)\beta_e] \quad (31')$$

10. Expression de la déflexion ε au droit de l'empennage. — La théorie des ailes sustentatrices permet de calculer la déflexion ε en un point *fixe* caractérisé par les coordonnées relatives

$$\xi = \frac{2x_1}{L} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{2z_1}{L}$$

L étant l'envergure de l'aile influençante.

Pour l'empennage qui se meut avec le planeur on aura

$$\zeta = \frac{2z_1}{L} = \zeta_0 - \xi i$$

Au point ζ et ξ on a trouvé [1] :

$$\varepsilon = \frac{Cz}{\pi\lambda}\left\{\frac{0{,}815}{\zeta^2 + x^2} + \frac{1}{\xi}[0{,}6 - |\zeta|]\right\} \quad (32)$$

Avec ζ variable l'expression de ε devient trop compliquée ; une approximation suffisante sera obtenue en remplaçant ξ par la valeur moyenne :

$$\zeta_m = \zeta_0 - \xi i_m$$

pour le premier terme et fréquemment aussi pour le deuxième. On aura ainsi au droit de l'empennage :

$$\varepsilon = \frac{Cz}{\pi k^2\lambda}\left\{\frac{0{,}815}{\zeta_m^2 + x^2} + \frac{1}{\xi}[0{,}6 - |\zeta_0| + i\xi]\right\}$$

ou encore

$$\varepsilon = \frac{ai}{\pi k^2\lambda}\left\{\frac{0{,}815}{\zeta^2_m + x^2} + \frac{1}{\xi}(0{,}6 - \zeta_0) + i\right\} \quad (33)$$

x, est le rapport de l'envergure L′ d'une aile fictive à distribution uniforme équivalente à l'aile réelle.

$$x \cong 0{,}85 \text{ à } 0{,}87 \quad \text{pour} \quad 4 < \lambda < 6$$

$x = 0{,}785$ pour toutes les ailes alliptiques.

---

[1] Voir aérodynamique appliquée, 2e partie, page 99.

Remarque. — En toute rigueur le calcul de ε doit être fait en considérant successivement chacune des ailes constitutives de la cellule mais les calculs sont alors très compliqués et nécessitent la connaissance des sustentations de chacune des ailes.

Nous adopterons ici « l'aile équivalente » dont la corde l_o aura été choisie préférablement pour correspondre à la corde totale de la cellule réelle.

Les centrages usuels comportent un centre de gravité modérément en arrière du Foyer résultant F'. Il en résulte qu'on peut admettre entre ξ et D la relation :

$$\xi \cong \frac{2D}{L} \cos \cdot \delta_m \cong \frac{2D}{l_0} \frac{l_0}{L} \cos \cdot \delta_m$$

Dans ces conditions il vient :

$$\varepsilon = \frac{a}{\pi k^2 \lambda} \left[\frac{0{,}815}{\zeta^2_m + x^2} + \frac{0{,}5L}{D \cos \delta_m} (0{,}6 - \zeta_0) \right] i + \frac{a}{\pi k^2 \lambda} i^2 \qquad (34)$$

et l'expression de Cm_T (e) devient

$$\left\{ \begin{aligned} Cm_{T(e)} \cong & - a'_e \times \frac{a}{\pi k^2 \lambda} i^2 \\ & + a'_e \left[1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda} \left(\frac{0{,}815}{(\zeta^2_m + x^2)} + \frac{0{,}5L(0{,}6 - \zeta_0)}{D \cos \delta_0} \right) \right] i + \\ & + a'_e \{ \alpha_e + m_2 \beta_{f0} + (m_1 - r m_2) \beta_e \} \end{aligned} \right. \qquad (35)$$

Dans cette expression on a remplacé δ par la valeur moyenne :

$$\delta_m = \delta_o - i_m$$

Nous posons enfin :

$$\left. \begin{aligned} a'_e &= a_e \left(\frac{V_e}{V} \right)^2 \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} \\ &\text{et} \\ f(D) &= \left[\frac{0{,}815}{(\zeta^2_m + x^2)} + \frac{0{,}5L(0{,}6 - \zeta_0)}{D \cos \delta_o} \right] \end{aligned} \right\} \qquad (36)$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} Cm_{T(e)} \cong & - \frac{a a'_e}{\pi k^2 \lambda} i^2 + a'_e \left[1 - \frac{a f(D)}{\pi k^2 \lambda} \right] i \\ & + a'_e [\alpha_e + m \beta_{f0} + (m_1 - r m_2) \beta_e] \end{aligned} \qquad (37)$$

11. Application. — Nous ferons l'application aux cas des planeurs STA$_e$ type normal avec empennage moyen (voir *Bulletin Technique*, n° 66).

Considérons le centre de gravité $G_2(x'/l = 0{,}35)$. D'après les dimensions et les dispositions adoptées on a :

$$S_e = 0{,}02 ; \quad S = 0{,}134 ; \quad D \cos \delta m = 0{,}41 ; \quad l_0 = 0{,}14 ; \quad L = 1m$$

$$\frac{S_e D \cos \delta m}{S l_0} = 0{,}44 ; \quad \lambda = 7{,}46 ; \quad \lambda_e = 4 ; \quad k^2\lambda = 7{,}05$$

$$\zeta_0 \cong 0{,}07 ; \quad a = 4{,}54 ; \quad a_e = 3{,}55 ; \quad \frac{a}{\pi k^2 \lambda} = 0{,}208$$

$$\zeta_m \cong 0 ; \quad x^2 = \overline{0{,}88}^2 = 0{,}775 ; \quad a_e \times \frac{S_e D \cos \delta m}{S l_0} = 1{,}56.$$

Nous expliciterons ultérieurement le facteur $\left(\frac{V_e}{V}\right)$. Les éléments du calcul de la déflexion seront d'après la formule (34).

$$\varepsilon = [0{,}219 + 0{,}152]\iota + 0{,}208 i^2 = 0{,}371 i + 0{,}208 i^2$$

En supposant $\beta_e = \beta_f = 0$ et en prenant $\alpha_e = -8^\circ$ soit $\alpha_e = -0{,}140$ radians pour les ailes 47 A et Romano : on trouve par application de la formule (37) :

$$\left(\frac{V}{V_e}\right)^2 \times Cm_T(e) = -0{,}323 i^2 + 1{,}55(1 - 0{,}37) i - 1{,}55 \times 0{,}140$$
$$= -0{,}323 i^2 + 0{,}985 i - 0{,}218$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $Cm_T(e)$ calculées par la formule précédente

i°	0°	3°	6°	9°	12°	15°	18°
$i =$	0	0,0523	0,1046	0,157	0,209	0,262	0,314
$100\left(\frac{V}{Ve}\right)^2 Cm_T e =$	— 21,8	— 16,79	— 11,85	— 7,15	— 2,6	+ 1,8	+ 5,9

Les figures 15 et 16 représentent ces résultats. Les valeurs expérimentales déduites par différence entre les courbes de moment avec et sans empennage s'accordent assez bien avec les valeurs calculées. D'ailleurs les documents expérimentaux ne nous ont pas permis de fixer la valeur de l'angle de calage avec toute l'exactitude nécessaire. Il faudrait pour cela avoir l'angle de portance nulle de l'empennage placé sur le fuselage, car l'interaction de ce dernier modifie notablement la courbe (Cz_e, i_e).

Au voisinage de $i = 0$ on observe d'après les courbes expéri-

mentales que l'effet de sillage apparaît avec des valeurs de $\left(\frac{V_e}{V}\right)^2$ comprises entre 0,74 et 0,83 pour les ailes 47 A et Romano.

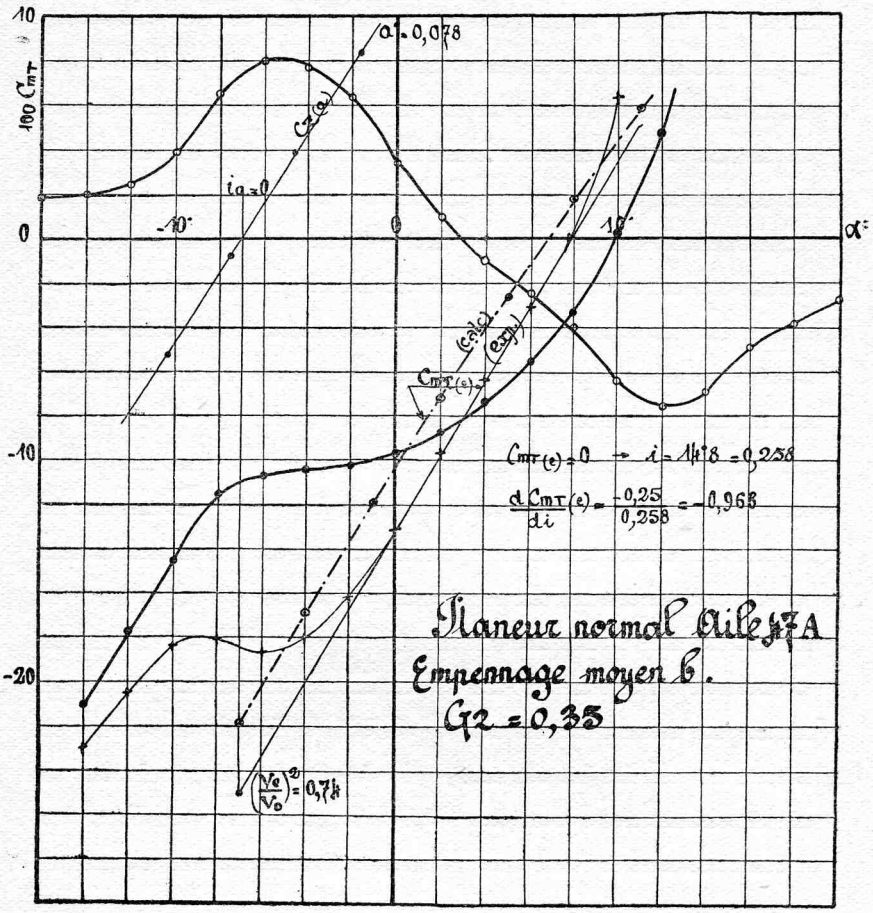


Fig. 15.

12. **Moment de tangage pour le planeur avec empennage et centrage limite.** — On aura en reprenant pour Cm_T $(a + \sigma)$ la relation (22) :

$$\left.\begin{aligned} Cm_T = &\left[\frac{ar' \sin \gamma'}{l_0}\left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) - \frac{aa'_e}{\pi k^2 \lambda}\right] i^2 + \\ &- \left[\frac{ar' \cos \gamma'}{l_0}\left(1 + \frac{Cx_0 + \frac{\sigma}{S}}{a}\right) - a_e'\left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda} f(D)\right)\right] i + \\ &+ C'm_0 - \frac{r' \sin \gamma'}{l_0}\left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right) + a'_e[\alpha_e + m\beta_{f0} + (m_1 - rm_2)\beta_e] \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

soit encore :

$$Cm_T = Ai^2 + Bi + C$$

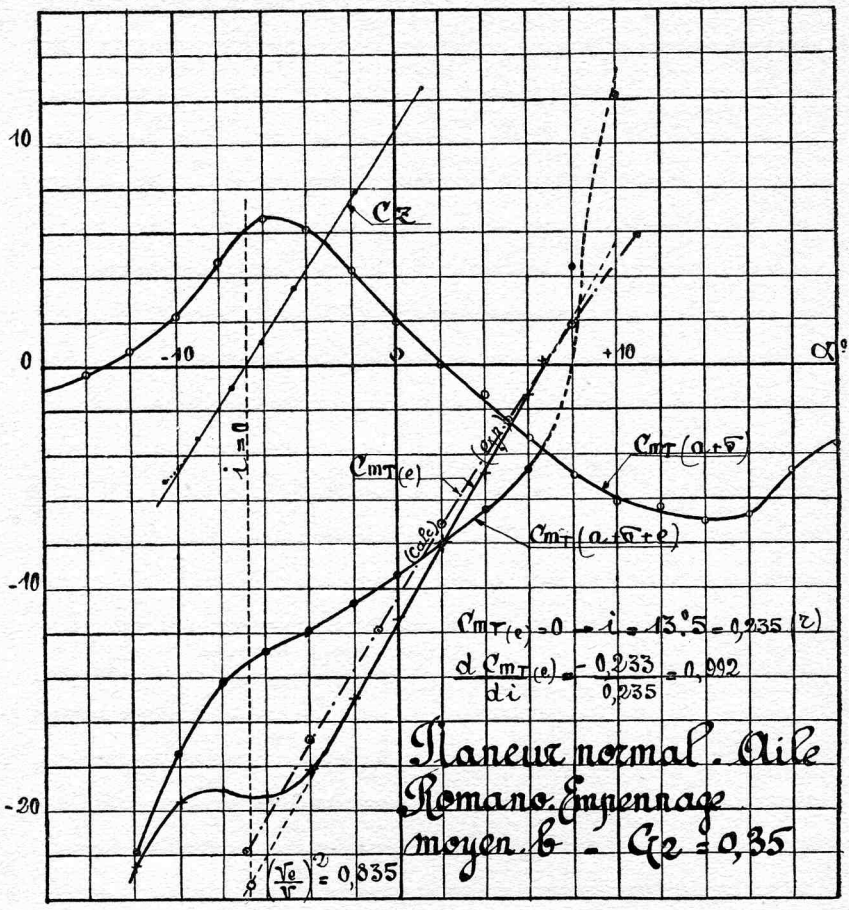


Fig. 16.

avec :

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{ar' \sin \gamma'}{l_0}\left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) - \frac{aa'_e}{\pi k^2 \lambda} \\ B &= -\frac{ar' \cos \gamma'}{l_0}\left(1 + \frac{Cx_0 + \frac{\sigma}{S}}{a}\right) + a_e'[1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda} - f(D)] \\ C &= C'm_0 - \frac{r' \sin \gamma'}{l_0}\left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right) + a'_e[\alpha_e + m\beta_{l0} + (m_1 - rm_2)\beta_e] \end{aligned}\right\} \quad (38')$$

on aura de même

$$\frac{dCm_T}{di} = 2Ai + B \qquad (39)$$

Centrage limite. — Suivant les conventions usuelles le centrage limite correspondra à la position de G pour laquelle on obtient l'équilibre indifférent au régime de piqué limite, soit pour $i = 0$. Il faut en outre que dCm_T/di reste positif pour $i > 0$.

La condition

$$\left(\frac{dCm_T}{di}\right)_{i=0} = 0 \qquad (40)$$

s'écrit :

$$B = -\frac{a(r'\cos\gamma')_0}{l_0}\left(1 + \frac{Cx_0 + \frac{\sigma}{S}}{a}\right) + a_e'\left[1 - \frac{a}{\pi k^2\lambda} f(D)\right] = 0 \qquad (40')$$

Cette relation détermine l'abscisse maximum :

$$(r'\cos\gamma')_0 = x_0'$$

qu'on peut donner à G par rapport à F' soit :

$$\frac{x_0'}{l_0} = \frac{a_e}{a}\left(\frac{V_e}{V}\right)^2 \frac{S_e D}{S l_0}\cos\delta_m \left(\frac{1 - \frac{af(D)}{\pi k^2\lambda}}{1 + \frac{Cx_0 + \frac{\sigma}{S}}{a}}\right) \qquad (41)$$

Le terme du dénominateur, dans la parenthèse, diffère peu de l'unité. En remplaçant $f(D)$ par sa valeur (36) on obtient :

$$\frac{x_0'}{l_0} = A_e \frac{S_e D\cos\delta_m}{S l_0}\left(1 - \frac{a}{\pi k^2\lambda} \times \frac{0{,}815}{\zeta_m^2 + x^2}\right) - A_e \frac{a}{\pi k^2\lambda}\frac{S_e}{S} \times \frac{0{,}5L(0{,}6 - \zeta)}{l_0} \qquad (41')$$

avec :

$$A_e = \frac{a_e}{a}\left(\frac{V_e}{V}\right)^2\left(1 - \frac{Cx_0 + \frac{\sigma}{S}}{a}\right)$$

Application. — Nous appliquerons la relation précédente au cas des planeurs STAé dont les essais très complets sont donnés dans le Bulletin STAé, n° 66 (Février 1930).

Considérons le *planeur normal* 1A, équipé avec les 3 ailes différentes et avec l'empennage moyen *b*. Les données numériques correspondantes ont été données et utilisées précédemment dans le calcul de $Cm_T(e)$; nous aurons ici pour l'application de a formule (41')

$$A_e = 0{,}782\left(\frac{V_e}{V}\right)^2\left(1 - \frac{0{,}06}{4{,}54}\right) \simeq 0{,}77\left(\frac{V_e}{V}\right)^2$$

d'où

$$\frac{x_0'}{l_0} = [0{,}77 \times 0{,}781 \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} - 0{,}77 \times 0{,}208 \times 0{,}149 \times 2{,}14]\left(\frac{V_e}{V}\right)^2$$

$$\frac{x_0'}{l_0} = [0{,}6 \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} - 0{,}05]\left(\frac{V_e}{V}\right)^2$$

Nous avons vu que pour $i = 0$, $\left(\frac{V_e}{V}\right)^2$ d'après les mesures expérimentales serait de l'ordre de 0,74 à 0,835 dans le cas des ailes 47A et Romano. En adoptant une valeur moyenne 0,79 on aurait donc :

$$\frac{x'_0}{l_0} = 0{,}374 \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} - 0{,}0395 \tag{42}$$

Par rapport au bord d'attaque on aurait :

$$\frac{X_0}{l_0} = 0{,}374 \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} + 0{,}210 \tag{42'}$$

Formule analogue à celle trouvée par M. Lapresle.

13. **Influence de la position du centre de gravité.** — Généralement on caractérise la position de par rapport à F′ par les deux coordonnées relatives

$$\frac{z'}{l_0} = \frac{r'}{l_0} \sin \gamma' \qquad \text{et} \qquad \frac{x'}{l_0} = \frac{r'}{l_0} \cos \gamma' \tag{41}$$

En omettant l'explicitation de $Cm_T(e)$ qui varie peu avec les déplacements usuels de G nous écrirons :

$$\left.\begin{aligned} Cm_T = C'm_0 + Cm_T(e) - \frac{z'}{l_0}\left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right) - a\frac{x'}{l_0}\left(1 + \frac{Cx_0 + \frac{\sigma}{S}}{a}\right) i \\ + a\frac{z'}{l_0}\left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) i^2 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

a) *Influence d'un déplacement de* G *en profondeur, c'est-à-dire parallèlement à* Gx_1. — Un tel déplacement correspond à x' variable avec z' constant. On voit de suite que pour $i = 0$ la valeur de Cm_T est indépendante de la position de G. Toutes les courbes de Cm_T se coupent en $i = 0$ à l'ordonnée constante :

$$Cm_{T(i_{00})} = C'm_0 - Cm_{T(e)} - \frac{z'}{l_0}\left(Cx_0 + \frac{\sigma}{S}\right)$$

Aux autres incidences on aura :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dCm_T}{d(x'/l_0)} &= -a\left(1+\frac{Cx_0+\sigma S}{a}\right)i \\ \text{et}\quad \frac{d}{d(x'/l_0)}\left[\frac{dCm_T}{di}\right] &= -a\left(1+\frac{Cx_0+\sigma/S}{a}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Ces relations expriment que :

1° Pour une même incidence i, les courbes Cm_T pour diverses valeurs x'/l_0 comportent des ΔCm_T proportionnels à i et à $\Delta(x'l_0)$ le coefficient de proportionnalité étant

$$-a\left(1+\frac{Cx_0+\sigma/S}{a}\right)\cong -a.$$

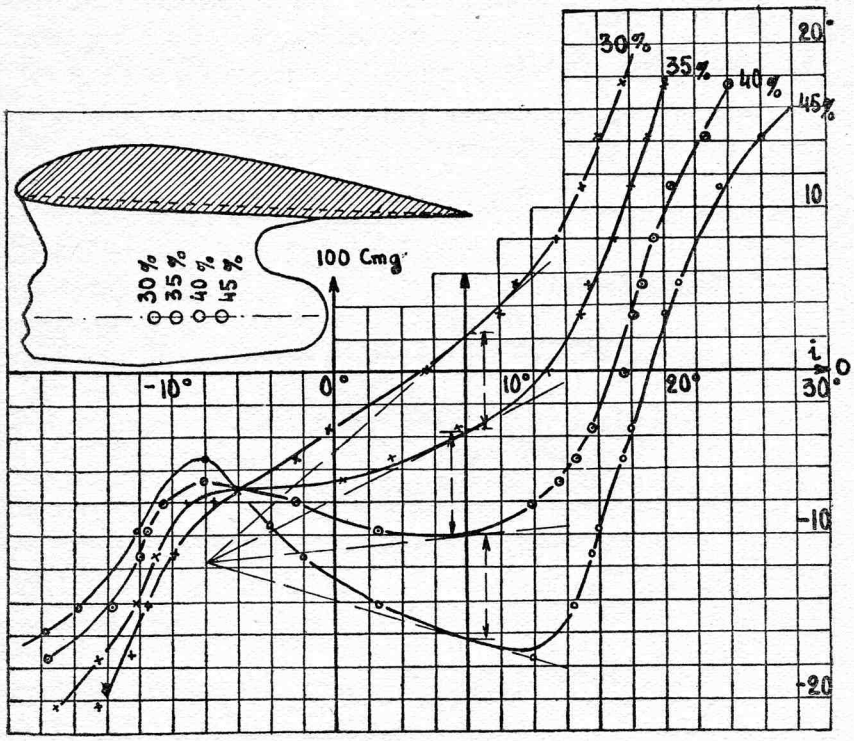


Fig. 17.

En d'autres termes on pourra déduire les diverses courbes (Cm_T, i), correspondant à divers x'/l_0 par un calcul, une construction graphique ou une interpolation très faciles (fig. 17).

2° Le coefficient angulaire des tangentes à ces courbes pour une même incidence i est également proportionnel au $\Delta(x'/l_0)$ (fig. 17).

b) *Influence d'un déplacement de* G *en hauteur, c'est-à-dire perpendiculairement à* Gx_1. — On aura comme précédemment

$$\frac{dCm_T}{d(z'/l_0)} = -(Cx_0 + \sigma/S) + a\left(1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda}\right) i^2 \qquad (45)$$

Pour $i = 0$ les courbes (Cm_T, i) diffèreront très peu puisque $(Cx_0 + \sigma/S)$ est en général très petit.

Pour $i \neq 0$ l'influence de z'/l_0 est également modérée par suite du facteur en i^2 et du signe différent des deux termes de l'équation.

REMARQUE. — Les influences sur Cm_T et sur dCm_T/di des variations en x'/l_0 et en z/l_0 sont en tous cas d'autant plus notables que a est plus grand. Il en résulte que les modifications d'équilibre ou de stabilité seront plus notables pour un allongement plus considérable. Il en résulte aussi que ces modifications seront plus grandes quand on passera par exemple de $\lambda = 5$ à $\lambda = 7$ que quand on passera de $\lambda = 10$ à $\lambda = 12$.

14. Influence de l'empennage horizontal. — Dans son ensemble l'influence sur Cm_T de l'empennage horizontal est caractérisée *principalement* par les termes :

$$a'_e\left(1 - \frac{af(D)}{\pi k^2 \lambda}\right) i + a'_e(\alpha_e + m'\beta_e)$$

pour une même incidence i, un même calage α_e et un même braquage β_e (ceci négligeant l'influence du terme en i^2).

De même le coefficient de stabilité statique $\frac{dCm_T}{di}$ sera proportionnel à $a'e\left(1 - \frac{af(D)}{\pi k^2 \lambda}\right)$ pour toute incidence. On pourra ainsi écrire en ce qui concerne la stabilité

$$\Delta\left(\frac{dCm_T}{di}\right) = a_e\left(\frac{V_e}{V}\right)^2\left(1 - \frac{af(D)}{\pi k^2 \lambda}\right) \Delta \frac{S_e D}{Sl} \qquad (46)$$

Si on modifie seulement la surface S_e, c'est-à-dire le rapport $\frac{S_e}{S}$, la modification corrélative de stabilité sera :

$$\Delta\left(\frac{dCm_T}{di}\right) = a_e\left(\frac{V_e}{V}\right)^2\left(1 - \frac{af(D)}{\pi k^2 \lambda}\right)\frac{D}{l} \Delta \frac{S_e}{S} \qquad (47)$$

comme $\frac{D}{l}$ est notable en général cette modification de $\frac{S_e}{S}$ sera la plus efficace.

Si on modifie seulement la distance $\frac{D}{l}$ on aura de même

$$\Delta\left(\frac{dCm_T}{di}\right) = a_e\left(\frac{V_e}{V}\right)^2\left(1 - \frac{af(D)}{\pi k^2\lambda}\right)\frac{S_e}{S}\Delta\frac{D}{l} \qquad (48)$$

L'influence du calage αe de la partie fixe d'empennage se traduira par le terme $a'_e\,\alpha_e$ et correspondra à un déplacement des courbes Cm_T parallèlement à elles-mêmes. C'est dire que la stabilité statique longitudinale n'est pas modifiée par l'angle de calage α_e. La modification de forme du profil de l'empennage se ramène d'ailleurs à une modification de α_e et de même l'influence du braquage initial βf_0 du compensateur.

15. **Influence particulière du braquage β_e du gouvernail de profondeur. Efficacité du gouvernail. Sens de son déplacement.** — Dans le cas général d'un gouvernail associé à un compensateur tel qu'on ait :

$$\beta_f = -r\beta_e \qquad (26)$$

L'influence du braquage β_e sur Cm_T, pour les essais en soufflerie, sera donnée par :

$$\frac{dCm_T}{d\beta_e} \simeq \frac{dCm_{Te}}{d\beta_e} = a'_e(m_1 - rm_2) = a_e\left(\frac{V_e}{V}\right)^2\frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0}(m_1 - rm_2) \qquad (49)$$

Cette expression pourrait s'appeler *coefficient de sensibilité du gouvernail*. Au facteur $\left(\frac{V_e}{V}\right)^2$ près ce coefficient sera constant. Ainsi dans le domaine des incidences i pour lesquelles $\frac{V_e}{V} = C^{te}$ les courbes (Cm_T, i) pour divers β_e se déplacent parallèlement à l'axe Cm_T de

$$\Delta Cm_T = a'_e(m_1 - rm_2)\Delta\beta_e$$

Réciproquement l'écart entre les courbes expérimentales pour divers β_e (voir fig. 18, 19 et 20) permettra de calculer le facteur de sillage, pour diverses valeurs de i

$$\left(\frac{V_e}{V}\right)^2 = \frac{Cm_T(\beta_e + \Delta\beta_e) - C_{m_T}(\beta_e)}{a_e\frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0}(m_1 - rm_2)\Delta\beta_e}$$

Nous remarquerons à nouveau que $(m_1 - rm_2)$ sera toujours positif en pratique. On peut dire que l'influence particulière du bra-

quage $\beta_f = -r\beta_e$ du compensateur est une diminution modérée du coefficient de sensibilité du gouvernail.

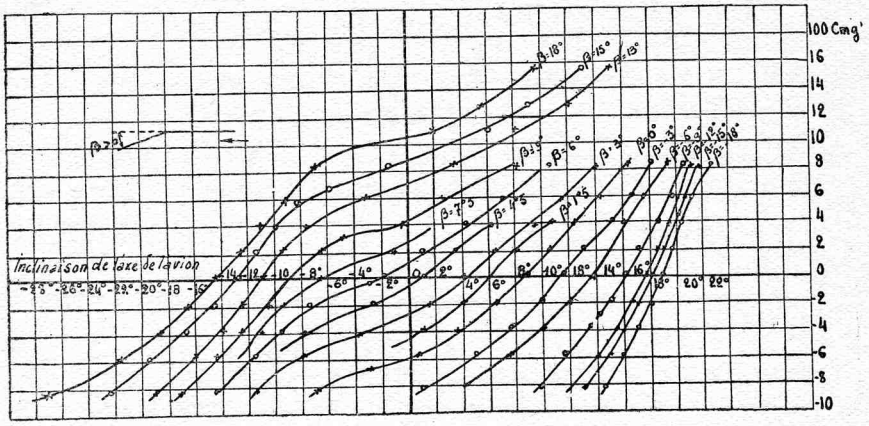


Fig. 18.

L'influence de β_e sur la stabilité c'est-à-dire sur $\frac{dCm_T}{di}$ sera nulle quand $\left(\frac{V_e}{V}\right)^2$ est constant.

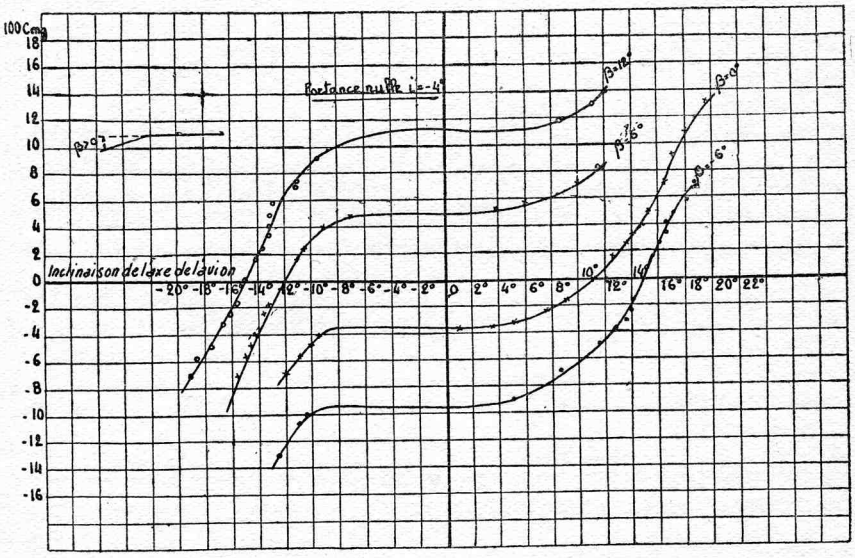


Fig. 19.

Efficacité du gouvernail. — On la caractérise par le rapport $di/d\beta_e$ qui exprime la pente locale de la courbe représentant les variations de l'incidence d'équilibre en fonction de β_e.

Chacun des points de cette courbe est donc caractérisée par la relation

$$Cm_T = 0.$$

Pour un planeur dont le paramètre de déformation est uniquement β_e on pourra écrire :

$$dCm_T = \frac{dCm_T}{di}\, di + \frac{dCm_T}{d\beta_e}\, d\beta_e \qquad (50)$$

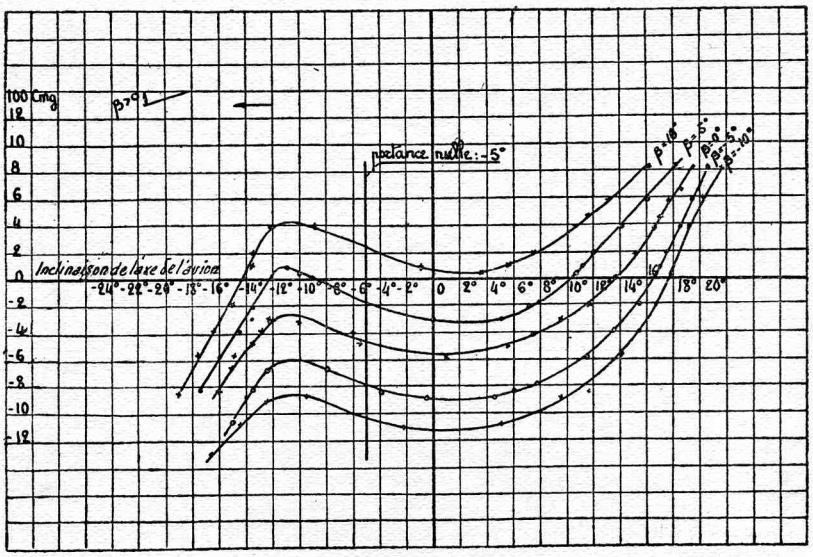


Fig. 20.

et aux incidences d'équilibre on aura :

$$dCm_T = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dCm_T}{di}\frac{di}{d\beta_e} = -\frac{dCm_T}{d\beta_e}$$

et

$$\frac{di}{d\beta_e} = -\frac{dCm_T/d\beta_e}{dCm_T/di}. \qquad (51)$$

Sens du déplacement du gouvernail. — $dCm_T/d\beta_e$, étant toujours positif et un planeur statiquement stable comportant $\frac{dCm_T}{di} > 0$ à toutes les incidences d'équilibre on en conclut que pour un tel planeur $di/d\beta_e$ est toujours négatif. En d'autres termes pour un planeur statiquement stable toute augmentation $+\ \Delta i$ de l'incidence d'équilibre requiert un braquage $\Delta\beta_e$ négatif. Compte tenu

du croisement des câbles entre le gouvernail et le manche à balai, il faudra *tirer* sur ce levier pour produire un cabrage $+ \Delta i$ et réciproquement il faudra *pousser* sur le levier pour produire un piqué $- \Delta i$.

Pour un planeur statiquement instable le résultat serait inverse de telle sorte que l'*inversion du sens du déplacement de la commande* du gouvernail de profondeur pour le *maintien* du planeur à divers régimes d'équilibre *est caractéristique* de l'instabilité de ce planeur.

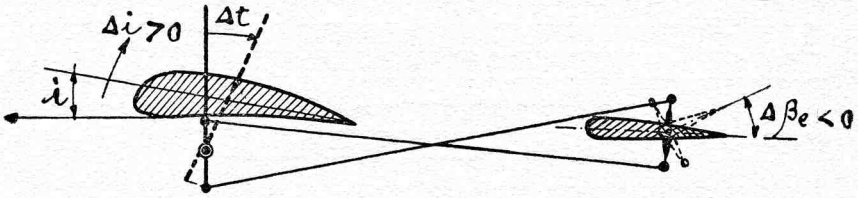


Fig. 21. — Planeur statiquement stable : $Vi > o$ requiert $\Delta Be < 0$ et une manœuvre Δt correspondant à *tirer* sur le levier de commande.

En réalité sur un tel planeur instable la rotation $+ \Delta i$ sera toujours amorcée par un mouvement préalable dans le sens Δt, mais la position finale du levier de commande correspondra à $\Delta\beta_e > 0$, c'est-à-dire sera *en avant* de la position de départ (1). Un pilote non averti de cette inversion de commande fera les manœuvres habituelles correspondant à un planeur stable et il pourra engendrer de ce fait des oscillations longitudinales sans cesse accrues par les dites manœuvres.

Remarque (2). — Si on relève en vol les valeurs de β_e corespondant aux diverses incidences i d'équilibre en vol plané (cette mesure se fera en exécutant des vols planés à diverses vitesses V sur la trajectoire) on pourra tracer la courbe des i en fonction des β_e. On en déduira le coefficient de stabilité statique par la relation

$$\frac{dCm_T}{di} = \frac{-\,dCm_T/d\beta_e}{di/d\beta_e} = -\left(\frac{dCm_T}{d\beta_e}\right)\left(\frac{d\beta_e}{di}\right)$$

$\frac{dCm_T}{d\beta_e}$ étant calculé comme il a été dit précédemment. Éventuelle-

(1) Ce déplacement préalable Δt a pour but de créer le couple cabreur nécessaire pour amorcer la rotation $+ \Delta i$ qui engendrera sur l'aile un nouveau moment à équilibrer finalement à l'incidence $\Delta i + i$.

(2) Voir aérodynamique appliquée, 2e partie, page 143.

ment on pourra contrôler en vol la valeur de $\frac{dCm_T}{d\beta_e}$ ainsi calculée en exécutant des vols avec poids total constant mais réparti différemment de façon à réaliser des ΔCm_T connus et à mesurer les $\Delta\beta_e$ correspondants. Il va de soi qu'on ne dépassera pas dans ces essais le centrage limite de sécurité.

Remarque 2. — La mesure en soufflerie de la courbe représentant les incidences d'équilibre i, en fonction des braquages β_e a été préconisée comme critère de la stabilité statique longitudinale (1).

En effet, cette courbe $i = f(\beta_e)$, le long de laquelle on a $Cm_i = 0$, partage le plan des coordonnées i, β_e, en deux régions pour lesquelles les moments de rappel sont le signe contraire. Il est donc facile de prévoir le mouvement que prendra l'avion, gouvernail bloqué, pour une attitude quelconque représentée par un point du plan.

La méthode préconisée est particulièrement favorable dans le cas d'un planeur à voilure déformable.

Elle permet d'apprécier la manœuvrabilité dans tous les domaines d'incidences. Elle peut être complétée pour l'étude de la maniabilité en construisant les courbes d'équilibre pour des valeurs données de Cm_i.

16. **Équilibre et stabilité statique avec gouvernail libre. Centrage limite. La stabilité avec équilibreur ou gouvernail libre doit être un critère important de sécurité.** — Il est possible de déterminer expérimentalement les courbes correspondantes de Cm_T à condition que la charnière du gouvernail sur la maquette lui permette une rotation sans frottements importants. Comme la maquette est placée verticalement dans la soufflerie le moment statique $mc = 0$. (Mais ce cas particulier rentre dans l'étude que nous allons faire ci-après). Il convient en outre que le gouvernail soit équilibré statiquement afin d'éviter dans cette expérimentation sur modèle réduit l'amorce de vibrations ou d'oscillations du gouvernail libre.

---

(1) R. Marchal, P. Simon et M. Delluc. « Nouvelle méthode expérimentale d'étude en soufflerie de la stabilité longitudinale statique des avions ». L'aéronautique, n° 175-176, août 1937.

Les positions d'équilibre et les braquages β_e correspondants, pour le gouvernail libre, résulteront de l'égalité entre le moment aérodynamique Mc et le moment statique mc, soit :

$$m_c = M_c = Cm_c \rho/2 V_e^2 S_{em} l_{em}. \tag{52}$$

L'expression de Cmc a été calculée chapitre IV § (5) (1) dans le cas général d'un gouvernail muni d'un compensateur. On a trouvé :

$$Cm_c = ni_e + q\beta_{f0} + (p - rq)\beta_e. \tag{53}$$

Pour simplifier les écritures nous poserons :

$$p' = p - rq$$

d'où

$$Cm_c = ni_e + q\beta_{f0} + p'\beta_e. \tag{53'}$$

De même nous écrirons pour l'expression de C$z(e)$:

$$\left.\begin{aligned} m' &= m_1 - rm_2 \\ Cz_c &= a_e(i_e + m_2\beta_{f0} + m'\beta_e) \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

En tirant β_e de l'équation (53') on obtient :

$$\beta_e = \frac{m_c}{S_{em} l_{em}} \frac{1}{p'} \frac{1}{\rho/2V_e^2} - \frac{ni_e + q\beta_{f0}}{p'}. \tag{55}$$

D'où en portant dans l'expression de C$z(e)$:

$$Cz_e = a_e\left(\frac{1 - m'n}{p'}\right)i_e + a_e\left(m_2 - \frac{m'q}{p'}\right)\beta_{f0} + \frac{a_e m'}{p'} \frac{m_c}{S_{em} l_{em}} \frac{1}{\rho/2V_e^2}$$

ou encore :

$$Cz_e = a'_1 i_e + a'_3 \beta_{f0} + a'_2 \frac{1}{\rho/2V_e^2} \tag{56}$$

avec :

$$a'_1 = a_c\left(1 - \frac{m'n}{p'}\right), \qquad a'_3 = a_e\left(m_2 - \frac{m'q}{p'}\right)$$

$$a'_2 = a_e \frac{m'}{p'} \frac{m_c}{S_{em} l_{em}}.$$

Il en résulte que l'expression de Cm_T peut s'écrire dans le cas du planeur avec gouvernail libre :

$$(Cm_T)_{GL} = Cm_T(a + \sigma) + Cz_e\left(\frac{V_e}{V}\right)^2 \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0}$$

avec Cz_e donné par 56 on obtient :

$$\left.\begin{aligned}(Cm_T)_{GL} = Cm_T(a+\sigma) + a'_1\left(\frac{V_e}{V}\right)^2 \frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_o}\, i_e \\ + a'_3\left(\frac{V_e}{V}\right)^2 \frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_o}\,\beta_{fo} + a'_2\frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_o}\frac{1}{\rho/2V^2}\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Finalement, en remplaçant ε par sa valeur on aura :

$$\left.\begin{aligned}(Cm_T)_{GL} = Cm_T(a+\sigma) + a'_1\left(\frac{V_e}{V}\right)^2 \frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0} \\ \left(1 - \frac{a}{\pi\cdot k^2\lambda} f(D) + \frac{\alpha e}{i}\right) i \\ + a'_3\left(\frac{V_e}{V}\right)^2 \frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0}\beta_{f0} + a'_2\frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0}\frac{1}{\rho/2V^2},\end{aligned}\right\} \quad (57')$$

ce qu'on peut écrire :

$$Cm_T(GL.) = Cm_T(a+\sigma) + A'_1 i_e + A'_3\beta_{f0} + A'_2\frac{1}{\rho/2V^2}, \quad (57'')$$

en posant :

$$A'_1 = a'_1\left(\frac{V_e}{V}\right)^2\frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0} = a_e\left(1 - \frac{m'n}{p'}\right)\left(\frac{V_e}{V}\right)^2\frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0},$$

$$A'_3 = a'_3\left(\frac{V_e}{V}\right)^2\frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0} = a_e\left(m_2 - \frac{m'q}{p'}\right)\left(\frac{V_e}{V}\right)^2\frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0},$$

$$A'_2 = a'_2\frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0} = a_e\frac{m'}{p'}\frac{m_c}{S_{em}l_{em}}\frac{S_eD\cos\delta_m}{Sl_0},$$

on aura de même :

$$\frac{dCm_T}{di}(GL) = \frac{dCm_T}{di}(a+\sigma) + A'_1\left[1 - \frac{a}{\pi k^2\lambda} f(D)\right] + A'_2\frac{d}{di}\left(\frac{1}{\rho/2V^2}\right) \quad (58)$$

dans laquelle on a remplacé $\frac{di_e}{di}$ par sa valeur.

Le planeur avec gouvernail libre sera stable, pour les incidences d'équilibre pour lesquelles on aura :

$$\left.\begin{aligned}Cm_T(GL) = 0 \\ \frac{dCm_T}{di}(GL) > 0.\end{aligned}\right\}$$

Ainsi en ce qui concerne la stabilité longitudinale avec gouvernail libre l'influence particulière de ce dernier est caractérisée par les termes comportant les facteurs A'_1, et A'_2. L'intervention du terme

en A'_2 est complexe car on a d'après l'équation de sustentation et d'après la pente de la trajectoire de vol plané

$$\frac{1}{\rho/2V^2} = \frac{S}{P}\frac{C_z}{\cos\theta} = \frac{S}{P}\frac{ai}{\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(C_x/C_z)^2}}.$$

En considérant seulement des trajectoires planées de pente modérée on pourra écrire très approximativement :

$$\frac{1}{\rho/2V^2} \simeq \frac{S}{P}ai\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{C_x}{C_z}\right)^2\right] \simeq \frac{S}{P}ai,$$

il en résulterait :

$$\frac{d}{di}\left(\frac{1}{\rho/2V^2}\right) \simeq \frac{S}{P}a.$$

Il en résulte que pour $p' > 0$ c'est-à-dire pour le cas d'un gouvernail sans compensateur (ou avec compensateur modéré) la stabilité avec équilibreur libre sera diminuée par l'influence du terme en A'_1 et augmentée par l'influence du terme en A'_2.

Dans le cas particulier où le gouvernail serait équilibré statiquement ($mc = 0$) il subsisterait seulement l'influence du terme en A'_1.

Une valeur particulière intéressante à considérer est celle pour laquelle on aurait :

$$1 - \frac{m'n}{p'} = 0 \qquad \text{soit} \qquad p' = m'n,$$

d'où il résulterait

$$a'_1 = A'_1 = 0.$$

Pour cette valeur particulière (qui comporte encore $p' > 0$) si nous supposons en outre $\beta fo = o$ et $mc = 0$ les expressions de Cm_T (GL) et de $\frac{dCm_T}{di}$ (GL) se réduisent à

$$Cm_T(\text{GL}) = Cm_T(a+\sigma) \qquad \text{et} \qquad \frac{dCm_T}{di}(\text{GL}) = \frac{dCm_T}{di}(a+\sigma).$$

Avec une compensation ainsi conditionnée le planeur *avec gouvernail libre se comportera comme s'il n'avait plus d'empennage de profondeur*. Les braquages β_e commandés par l'annulation du $Cm(c)$ aérodynamique seront tels que le $C_z(e)$ sera toujours nul.

Fréquemment dans ces conditions, la stabilité longitudinale sera nulle ou négative car les planeurs prévus avec un empennage comportent des centrages tels que les équilibres aux incidences usuelles sont plus ou moins instables pour le même planeur sans empennage.

En nous reportant aux valeurs de n, p, q, m_1 et m_2 la condition :

$$p' = p - rq = m'n = (m_1 - rm_2)n,$$

nous donnera :

$$\left(\upsilon_1 m_1 + \frac{s_1}{5{,}7}\right) - r\left(\upsilon_2 m_2 + \frac{s_2}{5{,}7}\right) = (m_1 - rm_2)\upsilon_1,$$

d'où :

$$s_1 = rs_2.$$

Cette relation imposera une valeur limite au rapport $\sigma f/\sigma e$ pour un σe et un r donnés. Elle s'écrit en effet :

$$(0{,}86 - \sigma_e) = r\left[0{,}7 + \frac{1 - \sigma_e}{15}\left(13{,}5 - \frac{\sigma_e}{\sigma_f}\right)\right],$$

d'où

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_e} = \frac{1/15r(1 - \sigma_e)}{1{,}6r - 0{,}86 + \sigma_e(1 - 0{,}9r)}.$$

En prenant $\sigma_e = 0{,}3$ et $r = 1$ on trouve ainsi

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_e} = \frac{1}{15} \times \frac{0{,}7}{0{,}77} = 0{,}061.$$

La valeur limite ainsi calculée ne doit pas pratiquement être atteinte en général.

Centrage limite avec équilibreur libre. — Le *centrage limite* se calculerait comme dans le cas du planeur avec gouvernail bloqué en écrivant :

$$\left(\frac{d\mathrm{C}m_{\mathrm{T}}}{di}(\mathrm{GL})\right)_{i=0} = 0.$$

Le coefficient B s'écrit en supposant $mc = 0$

$$\mathrm{B} = -\frac{ax'_0}{l_0}\left(1 + \frac{\mathrm{C}x_0 + \sigma/\mathrm{S}}{a}\right) + a'_1\left(\frac{\mathrm{V}_e}{\mathrm{V}}\right)^2 \frac{\mathrm{S}_e\mathrm{D}\cos\delta_m}{\mathrm{S}l_0}\left(1 - \frac{af(\mathrm{D})}{\pi k^2\lambda}\right), \quad (59)$$

et la condition B = 0 donne en remplaçant a'_1 par sa valeur :

$$\frac{x'_0}{l_0} = \frac{a_e}{a}\left(1 - \frac{m'n}{p'}\right)\left(\frac{\mathrm{V}_e}{\mathrm{V}}\right)^2 \frac{\mathrm{S}_e\mathrm{D}\cos\delta_m}{\mathrm{S}l_0}\left(1 - \frac{af(\mathrm{D})}{\pi k^2\lambda}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{C}x_0 + \sigma/\mathrm{S}}{a}\right). \quad (59')$$

Au facteur $(1 - m'n/p')$ près cette expression est analogue à celle trouvée précédemment. Ce facteur sera plus petit que l'unité quand on aura $p' > 0$. Il en résulte que le centrage limite avec gouvernail libre équilibré statiquement imposera un centre de gravité G_0 situé moins en arrière de F' dans le cas du planeur avec gouvernail bloqué.

Exemple : Supposons un gouvernail sans compensateur et reprenons le cas traité précédemment on aura :

$$\frac{S_{em}}{S_e} = 0{,}15 \; ; \qquad \frac{a_e}{a} = 0{,}78 \; ; \qquad \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} = 0{,}44 \text{ etc.}$$

$$m = 1{,}27 \sqrt{0{,}15}(1 - 0{,}03) = 0{,}477$$

$$n = 3{,}55 \times 0{,}19 \sqrt{0{,}15} = 0{,}261$$

$$p = 3{,}55\left[0{,}0735 \times 0{,}477 + \frac{0{,}86 - 0{,}15}{5{,}7}\right] = 0{,}565$$

$$1 - \frac{mn}{p} = 1 - \frac{0{,}477 \times 0{,}261}{0{,}565} = 1 - 0{,}22 = 0{,}78.$$

On aura donc maintenant :

$$\frac{x'_0}{l_0} = 0{,}292 \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} - 0{,}031.$$

17. Réactions de la commande du gouvernail de profondeur. — Cette réaction exercée dans la main du pilote par la manœuvre ou le maintien en position du gouvernail de profondeur provient des deux causes suivantes :

1° Cause *statique* correspondant au moment de charnière dû au poids du gouvernail, soit *mc* ce moment. Parfois *mc* pourra être partiellement ou totalement équilibré par l'action antagoniste de sandows à longue course (compensation statique).

2° Cause *aérodynamique* correspondant au moment de charnière dû aux réactions aérodynamiques sur le gouvernail : soit Mc ce moment. Nous prendrons $Mc > 0$ quand il est « cabreur », c'est-à-dire quand il tend à produire un braquage β_e négatif ; nous définirons Mc par la relation :

$$Mc = Cmc\rho/2V_e^2 S_{em} l_{em}$$

Sem et *lem* étant la surface et la corde moyenne du gouvernail.

La transmission des efforts dus à ces couples *mc* et Mc se fait par l'intermédiaire d'une transmission dont nous appellerons τ

le rapport de démultiplication calculé depuis la charnière du gouvernail jusqu'au point d'application de l'action du pilote (ou du servo-moteur), on aura donc : (fig. 22)

$$\tau F = Mc - mc \tag{60}$$

F est positif et correspond à une « poussée » dans la main du pilote c'est-à-dire quand $Mc - mc > 0$.

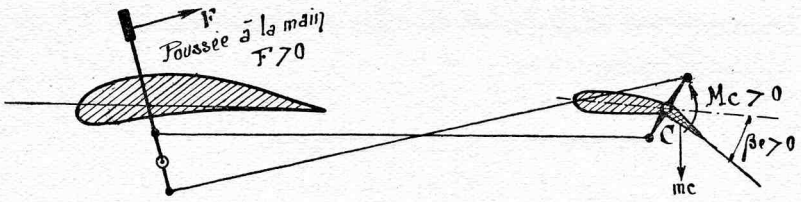


Fig. 22.

L'avion étant en vol plané avec un braquage β_e on a :

$$Cmc = ni_e + q\beta_{f0} + p'\beta_e = \frac{\tau F + mc}{\rho/2 V_e^2 S_{em} l_{em}} \tag{61}$$

on en déduit β_e et en portant cette valeur dans l'expression de $Cz(e)$ on obtient :

$$Cz_{(e)} = a'_1 i_e + a'_3 \beta_{f0} + a'_2 \frac{1}{\rho/2 V_e^2} + \frac{a'_2}{mc} \frac{\tau F}{\rho/2 V_e^2}. \tag{62}$$

L'expression de Cm_T s'écrit alors :

$$Cm_T = Cm_T(a + \sigma) + a'_1 \left(\frac{V_e}{V}\right)^2 \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} i_e + a'_e \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} \frac{1}{\rho/2 V^2} + a'_3 \left(\frac{V_e}{V}\right)^2 \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} \beta_{f0} + \frac{a'_2}{mc} \frac{S_e D \cos \delta_m}{S l_0} \frac{\tau F}{\rho/2 V^2}. \tag{63}$$

Pour les incidences d'équilibre on aura $Cm_T = 0$ et la valeur correspondant de F sera donnée par :

$$\frac{\tau F}{\rho/2 V^2} = \tau\varphi = -\frac{mc}{A'_2} \left\{ Cm_T(a + \sigma) - A'_1 i_e + A'_3 \beta_{f0} + A'_2 \frac{1}{\rho/2 V^2} \right\} \tag{64}$$

La variation de $\varphi = \dfrac{F}{\rho/2 V^2}$ avec i sera caractérisée par :

$$\tau \frac{d\varphi}{di} = -\frac{mc}{A'_2} \left\{ \frac{dCm_T}{di} (a + \sigma) + A'_1 \left[1 - \frac{a}{\pi k^2 \lambda} f(D)\right] + A'_2 \frac{d}{di} \left(\frac{1}{\rho/2 V^2}\right) \right\} \tag{65}$$

En comparant cette expression à celle trouvée pour $\dfrac{dCm_T}{di}$ (GL) on voit qu'on peut écrire :

$$\frac{d\varphi}{di} = -\frac{1}{\tau} \frac{mc}{A'_2} \frac{dCm_T}{di} \text{ (GL.)} = -\frac{1}{\tau} \frac{p'}{a_e m'} \frac{S_{em} l_{em} S l_0}{S_e D \cos \delta_m} \left(\frac{dCm_{T\,GL.}}{di}\right). \tag{66}$$

Ainsi pour un planeur stable avec gouvernail libre on aura :

$$\frac{d\varphi}{di} < 0 \qquad \text{pour} \qquad p' > 0.$$

En d'autres termes, dans le vol sur ce planeur avec gouvernail commandé : pour une augmentation d'incidence $+ \Delta i$ la réaction dans la main du pilote sera : $F - \Delta F$, telle que $-\Delta F < 0$ correspond à une traction.

La mesure en vol des réactions F pour divers régimes de vol, permettra de calculer φ et de tracer la courbe de φ en fonction des incidences i.

Fréquemment, on établit la courbe de F en fonction de V ou de $V\sqrt{\delta}$. Dans ces conditions on a toujours

$$\tau F = -\frac{mc}{A_2'} Cm_{T(GL.)} \frac{\rho}{2} V^2 \tag{63'}$$

et la courbe de F en fonction de V sera telle qu'on ait

$$\tau \frac{dF}{dV} = -\frac{mc}{A_2'} \frac{\rho}{2} V^2 \frac{d}{dV} (Cm_{T(GL.)}) - \frac{mc}{A_2'} \rho V (Cm_{T(GL.)}) \tag{67}$$

or

$$\frac{d}{dV} = \frac{d}{di}\left(\frac{di}{dV}\right) \simeq \frac{-4}{\rho V^3} \frac{P}{Sa} \frac{d}{di}\Big)$$

Il en résulte :

$$\tau \frac{dF}{dV} = + \frac{mc}{A_2'} \frac{2P}{VSa} \left(\frac{dCm_T}{di}_{(GL.)}\right) - \frac{mc}{A_2'} \rho V Cm_{T(GL.)} \tag{68}$$

Si nous considérons le vol avec gouvernail libre à la même vitesse V, on aura pour ce vol :

$$Cm_{T(GL.)} = 0$$

et la relation précédente se réduit à

$$\tau \frac{dF}{dV} = \frac{mc}{A_2'} \frac{2P}{VSa} \left(\frac{dCm_T}{di}_{(GL.)}\right) \tag{69}$$

Si le planeur avec gouvernail libre est stable, on devra avoir $dF/dV > 0$ tant que A'_2 sera lui-même positif.

Or on a

$$A_2' = a_e \frac{m_1 - rm_2}{p - rq} \frac{m_c}{\rho/2\, V_e^2 S_{em} l_{em}}$$

Donc

$$\tau \frac{dF}{dV} = \frac{(p - rq) S_{em} l_{em}}{a a_e (m_1 - rm_2)} \cdot \frac{2P}{S} \frac{\rho}{2} \left(\frac{V_e}{V}\right)^2 V \frac{dCm_{T(GL)}}{di} \tag{70}$$

Le cas limite envisagé précédemment impose $p - rq > 0$ et au plus égal à $(m_1 - rm_2)$.

18. Méthode graphique pour le calcul de l'empennage horizontal. — (Méthode Lepère, Aéronautique, Janvier 1929).

Supposons connue la courbe des $Cm_T\,(a + \sigma)$ du planeur sans empennage horizontal en fonction des incidences i.

Pour toute incidence d'équilibre on doit avoir :

$$Cm_T = 0 = Cm_T(a + \sigma) + Cz_e\left(\frac{V_e}{V}\right)^2 \frac{SeD \cos \delta m}{Sl_0} \qquad (77')$$

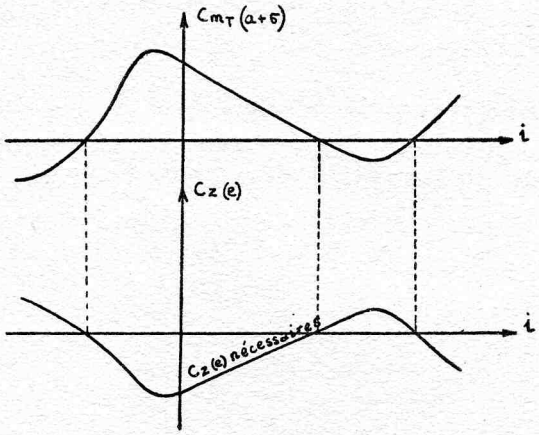


Fig. 23.

Il en résulte que le $Cz(e)$ *nécessaire* pour réaliser cet équilibre est donné par :

$$Cz_e = - Cm_T(a + \sigma)\left(\frac{V}{V_e}\right)^2 \frac{Sl_0}{SeD \cos \delta_m} = a_e(i_e + m\beta_e) \qquad (71)$$

on peut donc calculer les $Cz(e)$ nécessaires d'après les $Cm_T\,(a + \sigma)$ (fig. 23).

Par ailleurs : $ie = i - \varepsilon + \alpha_e$; ε étant la déflexion.

On aura donc encore :

$$Cz(e) = a_e(i - \varepsilon) + a_e \gamma_e + a_e m \beta_e$$

Ce qu'on peut construire graphiquement comme il est indiqué figure 24 sur laquelle O A B a la pente : a_e et BC a la pente : $a_e m$, On peut aussi construire en fonction de i la courbe des ε, soit par le calcul avec la formule (33), soit par déduction d'après des courbes expérimentales de Cm_T et de $Cm_T\,(a + \sigma)$. On en déduira la

figure 25. Juxtaposons sur cette même figure les axes $Cz(e)$ en ordonnées et i en abscisses, et traçons la courbe de $Cz(e)$ nécessaire en fonction des i d'après les $-Cm_T(a+\sigma)$ et la formule (71).

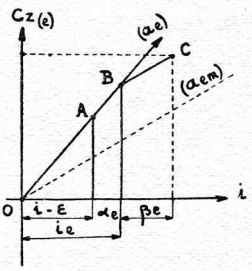


Fig. 24.

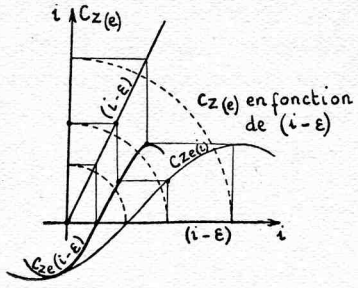


Fig. 25.

On en déduira par un calcul ou par construction graphique indiquée figure 25 la courbe $Cz(e)$ nécessaire en fonction des $(i-\varepsilon)$.

De ce qui précède on déduit l'abaque (fig. 26) pour le calcul de α_e et de β_e pour chaque incidence d'équilibre

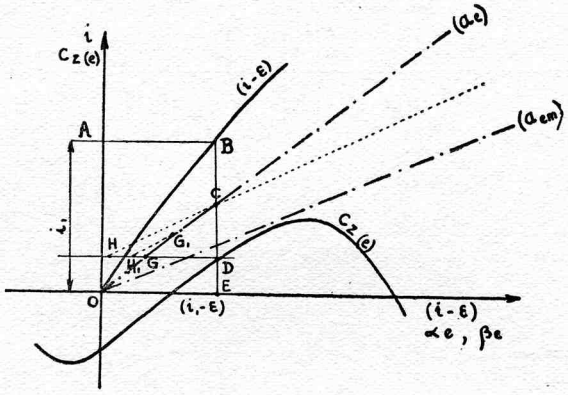


Fig. 26.

a) Système d'axes : ordonnées i et Cze, abscisses $(i-\varepsilon)$; α_e et β_e

b) Directions *indicatrices* $O(a_e)$ et $O(a_{em})$.

c) Courbe des $Cz(e)$ nécessaires en fonction des $(i-\varepsilon)$.

Soit $OA = i_1$, une incidence d'équilibre. On en déduit $OE = (i_1 - \varepsilon)$, puis $ED = Cz(e)$ nécessaire. Alors pour $\alpha_e = 0$ avec $\beta_e = 0$ l'ordonnée EC représente le $Cz(e)$ possible avec ce $(i_1 - \varepsilon)$. Il faut annuler l'excédent DC. Pour cela on peut :

1° Agir seulement sur α_e qu'on fera négatif (dans le cas figuré) et égal à — GD lu sur l'échelle des abscisses.

2° Agir seulement sur β_e qu'on fera négatif (dans le cas figuré) et égal à — HD tel que CH soit parallèle à l'indicatrice (A*em*).

3° Agir simultanément sur α_e et sur β_e par un cheminement composé de CG_1 et de G_1H_1 l'abscisse de G_1 par rapport à EC donnera le α_e, l'abscisse de H_1 par rapport à celle de G_1 donnera le β_e.

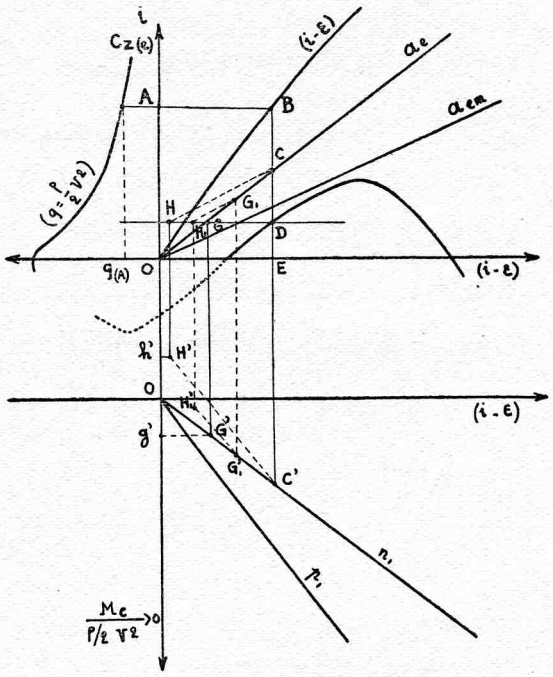


Fig. 27.

Le choix de la meilleure combinaison peut être résolu en considérant la réaction de la gouverne, c'est-à-dire le moment de charnière M*c*.

Nous avons en effet :

$$Cm_c = ni_e + p\beta_e = n(i - \varepsilon) + n\alpha_e + p\beta_e \qquad (53')$$

et nous aurons par suite :

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_c}{\rho/2V^2} &= \left(\frac{V_e}{V}\right)^2 S_{em} l_{em} \{ n(i - \varepsilon) + n(\alpha_e) + p\beta_e \} \\ &= n_1(i_e - \varepsilon) + n_1\alpha_e + p_1\beta_e \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

relation analogue à celle de C*ze* et qui conduit à une construction géométrique analogue (fig. 27).

a) Système d'axes : Ordonnées $\frac{M_c}{\rho/2V^2}$ vers le bas ; abscisses $(i - \varepsilon)$ α_e, β_e.

b) Directions *indicatrices* On_1 et Op_1 $\left(\frac{n_1}{p_1} \simeq 1{,}25 \sqrt{\frac{S_{em}}{S_e}}\right)$

A l'abscisse $OE = i - \varepsilon$ on a C′ sur On_1 homologue de C sur (Oa_e).

Alors si on agit sur α_e seulement on aura G′ à l'abscisse de G et $Mc/\rho/2V^2 = Og' > 0$. (Poussée à la main).

Si on agit sur β_e seulement on aura H′ à l'abscisse de H et $Mc/\rho/2V2 = Oh' < 0$ (traction à la main).

Si on agit à la fois sur α_e et sur β_e on aura H'_1 à l'abscisse de H_1, etc...

Pour calculer Mc on pourra recourir à un graphique donnant pour le cas du vol horizontal :

$$\rho/2V^2 = \frac{P}{SCz} = \frac{P}{Sai}.$$

On pourra ensuite calculer F par la formule (60). Dans le cas d'un gouvernail comportant un compensateur le facteur p de la formule 53′ sera remplacé par $p' = p - rq$.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

Étude du vol plané

Pages

1. Caractéristiques aérodynamiques du planeur 3
   a) Courbes unitaires $Cz = f(i)$ 4
   b) Courbes polaires $Cz = f(Cx)$ et $Cz^2 = f(Cx)$ 4
2. Équations du vol plané rectiligne 7
3. Vitesse sur la trajectoire de vol plané à un régime quelconque 10
4. Vitesse verticale de la descente planée 13
5. Étude du régime (w) de vitesse verticale minimum 14
6. Étude complémentaire du régime (t) à (Rx/Rz) mini $= Fi$ 16
7. Autre expression de w à un régime quelconque V 16
8. Durée de la descente planée 17
9. Polaire des vitesses d'un planeur 18

CHAPITRE II

Équilibre et stabilité
Statique longitudinale d'un planeur

1. Généralités 20
2. Conditions d'équilibre et de stabilité longitudinale 22
3. Moment de tangage dû à la cellule sustentatrice et aux résistances passives 23
4. Cas de la référence initiale des moments de tangage à un axe transversal voisin du bord d'attaque de la voilure 23
5. Centrage limite pour un planeur sans empennage 30
6. Planeur sans empennage mais avec aileron de courbure 31
7. Foyer résultant pour un planeur sans empennage 33
8. Cas de la référence initiale des moments de tangage à un axe transversal passant par le foyer résultant F' 34
9. Moment de tangage dû à l'empennage 36
10. Expression de la diflexion ε, au droit de l'empennage 38
11. Application 39
12. Moment de tangage pour le planeur avec empennage. Centrage limite 41
13. Influence de la position du centre de gravité 44
    a) Influence d'un déplacement de G en profondeur, c'est-à-dire parallèlement à Gx_1 44

b) Influence d'un déplacement de G en hauteur, c'est-à-dire perpendiculairement à Gx_1 46
14. Influence de l'empennage horizontal 46
15. Influence particulière du braquage βe, du gouvernail de profondeur. Efficacité du gouvernail. Sens de son déplacement 47
16. Équilibre et stabilité statique avec équilibreur libre. Centrage limite. 51
17. Réactions de la commande du gouvernail de profondeur..... 56
18. Méthode graphique pour le calcul de l'empennage horizontal..... 59

Saint-Amand (Cher), France. — Imprimerie R. Bussière. — 11-12-1937.

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.

F. ENRIQUES
De l'Académie *Dei Lincei*
Professeur à l'Université de Rome
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DE LA PENSÉE SCIENTIFIQUE

Ch. FABRY
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences
OPTIQUE

E. FAURÉ-FREMIET
Professeur au Collège de France
BIOLOGIE
(Embryologie et Histogenèse)

Ch. FRAIPONT
Professeur à la Faculté des Sciences de Liége
PALÉONTOLOGIE ET LES GRANDS PROBLÈMES DE LA BIOLOGIE GÉNÉRALE

Maurice FRECHET
Professeur à la Sorbonne
ANALYSE GÉNÉRALE

M. L. GAY
Professeur de Chimie-Physique à la Faculté des Sciences de Montpellier
THERMODYNAMIQUE ET CHIMIE

J. HADAMARD
Membre de l'Institut
ANALYSE MATHÉMATIQUE ET SES APPLICATIONS

Victor HENRI
Professeur à l'Université de Liége
PHYSIQUE MOLÉCULAIRE

A. F. JOFFÉ
Directeur de l'Institut Physico-Technique de Leningrad
PHYSIQUE DES CORPS SOLIDES

A. JOUNIAUX
Professeur à l'Institut de Chimie de Lille
CHIMIE ANALYTIQUE
(Chimie-Physique, minérale et industrielle)

N. K. KOLTZOFF
Directeur de l'Institut de Biologie expérimentale de Moscou
Membre honoraire R. S. Edinburgh
LA GÉNÉTIQUE ET LES PROBLÈMES DE L'ÉVOLUTION

P. LANGEVIN
Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France
I. — RELATIVITÉ
II. — PHYSIQUE GÉNÉRALE

Louis LAPICQUE
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
PHYSIOLOGIE GÉNÉRALE DU SYSTÈME NERVEUX

A. MAGNAN
Professeur au Collège de France
MORPHOLOGIE DYNAMIQUE ET MÉCANIQUE DU MOUVEMENT

Ch. MARIE
Directeur de Laboratoire à l'Ecole des Hautes Etudes
ÉLECTROCHIMIE APPLIQUÉE

Ch. MAURAIN
Membre de l'Institut
Doyen de la Faculté des Sciences
Directeur de l'Institut de Physique du Globe
PHYSIQUE DU GLOBE

André MAYER
Professeur au Collège de France
PHYSIOLOGIE

Henri MINEUR
Astronome à l'Observatoire de Paris
Maître de Recherches
ASTRONOMIE STELLAIRE

Ch. MUSCELEANU
Professeur à la Faculté des Sciences de Bucarest
PHYSIQUE GÉNÉRALE ET QUANTA

M. NICLOUX
Professeur à la Faculté de Médecine de Strasbourg
CHIMIE ANALYTIQUE
(Chimie organique et biologique)

P. PASCAL
Correspondant de l'Institut
Professeur à la Sorbonne et à l'Ecole
CHIMIE
GÉNÉRALE et MINÉRALE

Ch. PÉREZ
Centrale des Arts et Manufactures
Professeur à la Sorbonne
BIOLOGIE ZOOLOGIQUE

CATALOGUE SPÉCIAL SUR DEMANDE

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.

J. PERRIN
Membre de l'Institut
Prix Nobel de Physique
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
ATOMISTIQUE

Marcel PRENANT
Professeur à la Sorbonne
I. — BIOLOGIE ÉCOLOGIQUE
II. — LEÇONS DE ZOOLOGIE

A. REY
Professeur à la Sorbonne
HISTOIRE DES SCIENCES

Y. ROCARD
Maître de Recherches
THÉORIES MÉCANIQUES
(Hydrodynamique-Acoustique)

R. SOUÈGES
Chef de Travaux
à la Faculté de Pharmacie
EMBRYOLOGIE
ET MORPHOLOGIE VÉGÉTALES

TAKAGI
Professeur à l'Université Impériale de Tokyo
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

TAMIYA-(HIROSHI)
Membre du Tokugawa Biologisches Institut-Tokyo
BIOLOGIE (Physiologie cellulaire)

A. TCHITCHIBABINE
Membre de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.
CHIMIE ORGANIQUE
(Série hétérocyclique)

Georges TEISSIER
Sous-directeur de la Station Biologique de Roscoff
BIOMÉTRIE
ET STATISTIQUE BIOLOGIQUE

G. URBAIN
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
THÉORIES CHIMIQUES

Pierre URBAIN
Maître de Conférences à l'Institut d'Hydrologie et de Climatologie de Paris
GÉOCHIMIE

Y. VERLAINE
Professeur à l'Université de Liége
PSYCHOLOGIE ANIMALE

P. WEISS
Membre de l'Institut
Directeur de l'Institut de Physique de l'Université de Strasbourg
MAGNÉTISME

R. WURMSER
Directeur du Laboratoire de Biophysique de l'Ecole des Hautes Etudes
BIOPHYSIQUE

Actualités Scientifiques et Industrielles

Série 1937 *(suite)* **:**

515. Duclaux (J.). **Pression osmotique. II. Partie théorique** ..... 15 fr.
516. Renaud (P.). **Analogies entre les principes de Carnot, Mayer et Curie** ..... 10 fr.
517. Haissinsky (M.). **Le Polonium** ..... 12 fr.
518. Noether (E.) et Cavaillès (J.). **Briefwechsel Cantor-Dedekind** ..... 20 fr.
519. Mariani (J.). **Les limites des notions d'objet et d'objectivité** ..... 20 fr.
520. Gumbel (E. J.). **La durée extrême de la vie humaine** ..... 18 fr.
521. Souèges (R.). **Les lois du développement** ..... 18 fr.
522. Marinesco (N.). **Propriétés piézo-chimiques, physiques et biophysiques des ultra-sons. Technique des ondes élastiques de haute fréquence** ..... 15 fr.
523. Marinesco (N.). 2e partie. **Destruction des micro-organismes. Préparation des colloïdes à basses températures. Réactions explosives. Réactions photochimiques.** 18 fr.
524. Gonseth (F.). **Qu'est-ce que la logique ?** ..... 18 fr.
525. Tinbergen (J.). **An econometric approach to business cycle problems** ..... 18 fr.
526. Balachowsky (A.). **Les cochenilles de France, d'Europe, du Nord de l'Afrique et du bassin méditerranéen** ..... 18 fr.

LISTE COMPLÈTE A LA FIN DU VOLUME

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. Bussière.

1 FEV 1946