

Skript zur Vorlesung

Tragflügelaerodynamik

Prof. Dr.-Ing. R. Radespiel

Ausgabe WS 2007/2008



Institut für Strömungsmechanik
Technische Universität Braunschweig
2007

Inhaltsverzeichnis

1 Übersicht über die Tragflügeltheorie	7
1.1 Aufgabenstellung	7
1.1.1 Hauptaufgaben der Aerodynamik	7
1.1.2 Geometrische Hauptformen von Flügeln	9
1.1.3 Ermittlung der aerodynamischen Beiwerte	12
1.2 Grundgleichungen und Hierarchie der Strömungsgleichungen	14
1.2.1 Allgemeine Potentialgleichung	14
1.2.2 Linearisierung der Potentialgleichung	17
1.2.3 Linearisierung der Randbedingungen	20
1.2.4 Vereinfachung der Druckbeziehung	22
1.3 Affinitätsgesetze	23
1.3.1 Göthert'sche Regel	23
1.3.2 Prandtl - Glauert - Ackeret'sche Regel	27
1.4 Einteilung der Tragflügeltheorie	29
1.5 Literatur zu Kapitel 1	31
2 Der Tragflügel bei Unterschallgeschwindigkeit	32
2.1 Allgemeine Lösung für das Störpotential	32
2.1.1 Formulierung der Aufgabenstellung	32
2.1.2 Allgemeine Lösung	33
2.1.3 Deutung von punktförmigen Singularitäten	36
2.1.3.1 Quellsingularität σ	36
2.1.3.2 Dipolsingularität μ	38
2.1.4 Deutung von Singularitätenverteilungen auf Oberflächen	40
2.1.4.1 2D Quellverteilung	40
2.1.4.2 2D Dipolverteilung	42
2.1.4.3 2D Wirbelverteilung	43
2.2 Skelett-Theorie für schlanke Profile	44
2.2.1 Aufgabenstellung	44
2.2.2 Skelett-Theorie	45
2.2.2.1 Grundgleichung	46
2.2.2.2 Lösungsverfahren	48
2.2.2.3 Aerodynamische Beiwerte	51
2.2.2.4 Normalverteilungen	53
2.3 Wirbelmodell für das 3D Problem	59
2.4 Der ungepfeilte Flügel großer Streckung	62
2.4.1 Die Prandtl'sche Integralgleichung	62
2.4.2 Tragflügel mit elliptischer Zirkulationsverteilung	69
2.4.2.1 Auftriebsverteilung	69

2.4.2.2	Prandtl'sche Umrechnungsformeln	73
2.4.3	Lösung der Prandtl'schen Integralgleichung	76
2.4.4	Das Quadraturverfahren von Multhopp	80
2.4.4.1	Herleitung des Verfahrens	80
2.4.4.2	Anwendung des Verfahrens	84
2.4.5	Tragflügel mit Klappen	86
2.4.6	Einige Ergebnisse	89
2.5	Der Pfeilflügel beliebiger Streckung	95
2.5.1	Die Grundgleichung der Tragflächentheorie	95
2.5.2	Das Wirbelleiterverfahren	99
2.5.3	Das Panel-Verfahren zur Lösung des Auftriebs- und Dickenproblems	104
2.5.3.1	Kinematische Strömungsbedingung als Neumann-Problem	105
2.5.3.2	Kinematische Strömungsbedingung als Dirichlet-Problem	106
2.5.3.3	Kutta'sche Abflussbedingung	107
2.5.3.4	Aufstellung des linearen Gleichungssystems	109
2.5.3.5	Einfache Singularitäten-Elemente und ihre Einflusskoeffizienten	111
2.6	Literatur zu Kapitel 2	115
3	Der Tragflügel bei Überschallgeschwindigkeit	117
3.1	Einführung in das 2D Problem	118
3.1.1	Aufgabenstellung und allgemeine Lösung	118
3.1.2	Die Umströmung einer flachen Ecke	121
3.1.3	Die angestellte ebene Platte	123
3.1.4	Beliebige Profile	126
3.1.5	Gepfeilte Flügel $\Lambda \rightarrow \infty$	129
3.2	Kegelsymmetrische Überschallströmungen	132
3.2.1	Grundbegriffe	132
3.2.2	Die Transformation von Busemann	134
3.2.3	Die Transformationen von Tschaplygin und Germain	137
3.2.4	Rechteckflügel	142
3.2.5	Deltaflügel mit Unterschallvorderkanten	147
3.2.6	Deltaflügel mit Überschallvorderkanten	154
3.3	Literatur zu Kapitel 3	157
4	Theorie schlanker Körper	158
4.1	Schlankheitsbedingung und Grundgleichung	158
4.2	Auftriebsproblem für schlanke Flügel	161
4.3	Zusammenstellung aerodynamischer Beiwerte	170
4.4	Literatur zu Kapitel 4	172

Anerkennung

Das vorliegende Skript der Vorlesung Tragflügelaerodynamik folgt in wesentlichen Teilen der von Prof. Dr.-Ing. D. Hummel bis zum WS 2000/2001 an der TU Braunschweig gehaltenen gleichnamigen Vorlesung. Eine Ausarbeitung der Vorlesung von Prof. Hummel ist 2003 als Buch erschienen

D. Hummel: Aerodynamik II - Einführung in die Tragflügeltheorie

in der Reihe: Braunschweiger Schriften zum Maschinenbau, Bd 7,
Fachbereich Maschinenbau der TU Braunschweig, ISBN 3-936148-07-4

das ich zur Vertiefung sehr empfehle. Ich bin sehr froh, die Vorlesung auf dieser Grundlage weiterführen zu können.

R. Radespiel

Tragflügelaerodynamik

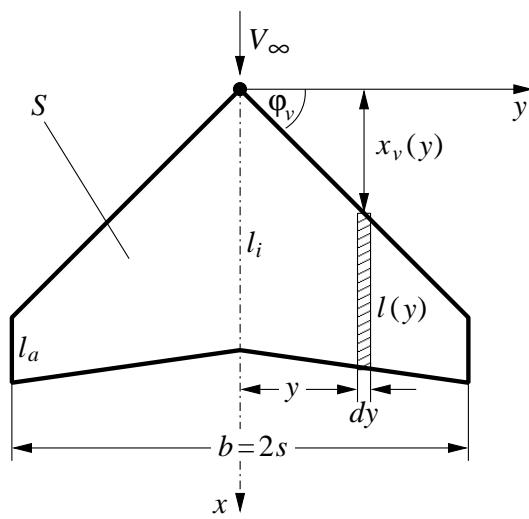
Voraussetzung für das Verständnis der Vorlesung Tragflügelaerodynamik sind die Grundvorlesungen Strömungsmechanik I und II (3. und 4. Semester), die bereits einführende Kapitel über 2D und 3D Tragflügelströmungen umfassten.

1 Übersicht über die Tragflügeltheorie

Die Aerodynamik des Flugzeugs ist die Lehre von den Luftkräften, die bei der Umströmung eines Flugzeuges auftreten. Diese Vorlesung beschränkt sich auf den Tragflügel. Rumpf, Leitwerke und Interferenzprobleme werden zunächst nicht betrachtet. Ein Tragflügel setzt sich geometrisch aus einer Anordnung von Profilen zusammen. Für die Umströmung des räumlichen Tragflügels stellt die 2D Profilumströmung ein wesentliches Element dar. Die Bestimmung der Luftkräfte kann jedoch nicht durch eine einfache Addition von 2D Ergebnissen erfolgen, sondern es kommen ganz wesentliche 3D Effekte hinzu. In der Vorlesung Tragflügelaerodynamik stehen diese 3D Effekte im Vordergrund, während in der Vorlesung Profilaerodynamik das 2D Problem vertieft behandelt wird.

1.1 Aufgabenstellung

1.1.1 Hauptaufgaben der Aerodynamik



Bei einem Tragflügel endlicher Spannweite $b = 2s$ sind die örtliche Flügeltiefe $l(y)$ und deren Lage $x_v(y)$ Funktionen der Spannweitenkoordinate y . Daraus ergibt sich der Flügelgrundriss mit den wichtigsten Parametern

S Flügelfläche

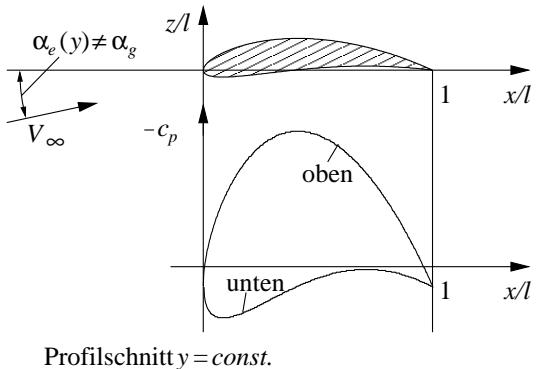
$\Lambda = \frac{b^2}{S}$ Seitenverhältnis

$\lambda = \frac{l_a}{l_i}$ Zuspitzung

Auch die Anordnung der Profile kann sich längs der Spannweite ändern. Dabei unterscheidet man

- geometrische Verwindung (Profilform konstant)
- aerodynamische Verwindung (Profilform veränderlich) ,

wobei auch Kombinationen beider Verwindungsarten vorliegen können. Die Geometrie von Tragflügeln endlicher Spannweite wird in *Übung 1* ausführlich dargestellt. An einem Tragflügel endlicher Spannweite stellt sich in einem Profilschnitt $y = \text{const.}$ eine Verteilung des Druckbeiwertes



$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}$$

mit

$$q_\infty = \frac{\rho_\infty}{2} V_\infty^2$$

ein. Diese stimmt jedoch nur qualitativ mit der des zugehörigen 2D Problems überein. Der betrachtete Profilschnitt wird mit einem Anstellwinkel $\alpha_e(y)$ effektiv angeströmt, der nicht mit dem geometrischen Anstellwinkel des Flügels α_g übereinstimmt. Die Anstellwinkeländerung wird durch 3D Effekte bewirkt.

Aus der Druckverteilung und der Verteilung der örtlichen Wandschubspannung ergeben sich durch Integration in x-Richtung die dimensionslosen aerodynamischen Beiwerte

$$c_a(y) = \frac{dA}{q_\infty l(y) dy} ; \text{ örtlicher Auftriebsbeiwert}$$

$$c_w(y) = \frac{dW}{q_\infty l(y) dy} ; \text{ örtlicher Widerstandsbeiwert}$$

$$c_m(y) = \frac{dM}{q_\infty l^2(y) dy} ; \begin{array}{l} \text{örtlicher Nickmomentenbeiwert,} \\ \text{Bezugspunkt } l/4, \text{ schwanzlastig positiv.} \end{array}$$

Eine nachfolgende Integration in Spannweitenrichtung ergibt dann die aerodynamischen Gesamtbeiwerte

$$c_A = \frac{A}{q_\infty S} ; c_W = \frac{W}{q_\infty S} ; c_M = \frac{M}{q_\infty S l_{\text{Bezug}}} .$$

Als Bezugsflügeltiefe wird dabei verwendet

$$l_{Bezug} = l_\mu = \frac{1}{S} \int_{-s}^{+s} l^2(y) dy \quad .$$

Die Zusammenhänge zwischen den örtlichen Beiwerten und den Gesamtbeiwerten wurden schon in der Vorlesung Strömungsmechanik II bereitgestellt. Sie werden in *Übung 2* erneut vertieft behandelt.

In der Tragflügeltheorie unterscheidet man zwei wichtige Hauptaufgaben:

1. Hauptaufgabe (Entwurfsaufgabe), indirektes Problem

Gegeben: Grundriss, Druckverteilung, aerodynamische Beiwerte, Machzahl
 $Ma_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}$ und Reynoldszahl $Re_\infty = \frac{V_\infty l_\mu}{\nu}$ der Anströmung.

Gesucht: Geometrie des 3D Tragflügels (Profilierung) und des Anstellwinkels α_g ,
 evtl. unter Nebenbedingungen wie z. B. größtmögliche Volumen, usw.

2. Hauptaufgabe (Nachrechnungsaufgabe), direktes Problem

Gegeben: Geometrie des 3D Tragflügels, Anstellwinkel α_g , Machzahl Ma_∞ und
 Reynoldszahl Re_∞ der Anströmung.

Gesucht: Druckverteilung, aerodynamische Beiwerte.

Die 1. Hauptaufgabe ist wegen der i.a. sehr großen Zahl von Nebenbedingungen beim Entwurf nicht direkt lösbar. Sie wird häufig durch sukzessives Lösen der 2. Hauptaufgabe iterativ gelöst. In der Vorlesung Aerodynamik I wird daher die Nachrechnungsaufgabe behandelt und dabei Berechnungsverfahren für Unter- und Überschallströmungen bereitgestellt.

1.1.2 Geometrische Hauptformen von Flügeln

Bezüglich der zu untersuchenden Flügelgeometrie braucht nicht der allgemeinste Fall eines 3D Körpers betrachtet zu werden. Vielmehr kann man sich auf gewisse Hauptformen von Tragflügeln beschränken, die alle symmetrisch zur x-z-Ebene sind. Für den Horizontalflug gelten die Gleichgewichtsbedingungen (Auftrieb A , Widerstand W , Gewicht G , Masse m , Schub F)

$$A = G = mg \quad \text{und} \quad W = F$$

Flug mit kleiner Machzahl, $Ma_\infty \ll 1$

Diese Flüge werden mit Propellerantrieb durchgeführt. In diesem Fall ist der leistungsspezifische Brennstoffverbrauch (\dot{m}_B Brennstoffverbr., P Leistung, V_∞ Fluggeschwindigkeit)

$$b_P = \frac{\dot{m}_B}{P} = \frac{\dot{m}_B}{FV_\infty} \quad . \quad \left[\frac{kg}{PSs} \right]$$

Damit gilt für die Massenabnahme im Horizontalflug (Zeit t , Flugstrecke s , $V_\infty = ds/dt$)

$$\begin{aligned} dm &= -b_P F V_\infty \frac{dt}{ds} ds \\ ds &= -\frac{1}{g b_P} \frac{mg}{F} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{g b_P W} \frac{A}{m} dm \quad . \end{aligned}$$

Durch Integration folgt daraus für die Reichweite R

$$R = \frac{1}{g b_P} \frac{A}{W} \ln \frac{m_{Start}}{m_{Landung}} \quad .$$

Dies ist die Breguet'sche Reichweitenformel für ein Propellerflugzeug (siehe Flugmechanik I). Zur Erzielung einer großen Reichweite beim Transport eines Gewichtes $G = A$ muss der Widerstand W möglichst klein sein. Bei kleinen Fluggeschwindigkeiten V_∞ setzt sich der Widerstand zusammen aus dem Reibungswiderstand W_r und dem induzierten Widerstand W_i entsprechend

$$W = W_r + W_i \quad ,$$

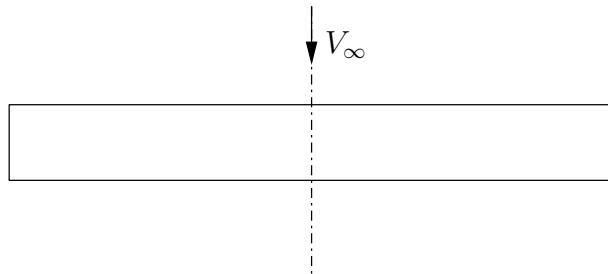
und für den Beiwert des induzierten Widerstandes gilt (detaillierte Herleitung in Kapitel 2.4.2)

$$c_{W_i} = \frac{W_i}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 S} = \frac{c_A^2}{\pi \Lambda}$$

mit

$$\Lambda = \frac{b^2}{S} \quad (\text{Seitenverhältnis}) \quad .$$

Damit ergibt sich ein kleiner Widerstand für Flügel mit großem Seitenverhältnis Λ . Dies führt auf den



ungepfeilten Flügel großer Streckung als erste Hauptform von Tragflügeln, und zwar für den Flug mit kleinen Geschwindigkeiten, wie sie z.B. bei Segelflugzeugen und bei kleinen Motorflugzeugen vorliegen.

Flug bei schallnahen Geschwindigkeiten, $Ma_\infty \approx 1$

In diesem Fall werden für den Antrieb Strahltriebwerke verwendet. Ihr schubspezifischer Brennstoffverbrauch ist

$$b_F = \frac{\dot{m}_B}{F} \quad . \quad \left[\frac{kg}{Ns} \right]$$

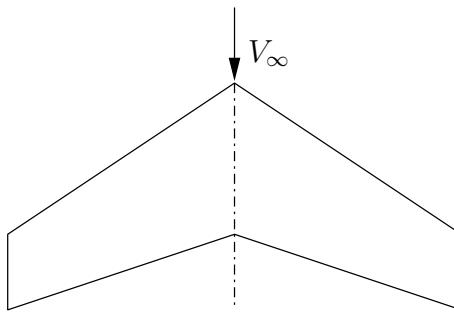
Die Massenabnahme im Horizontalflug ist dann

$$\begin{aligned} dm &= -b_F F \frac{dt}{ds} ds = -b_F \frac{F}{V_\infty} ds \\ ds &= -\frac{1}{gb_F} V_\infty \frac{mg}{F} \frac{dm}{m} \quad , \end{aligned}$$

und durch Integration folgt die Breguet'sche Reichweitenformel in der Form

$$R = \frac{1}{gb_F} V_\infty \frac{A}{W} \ln \frac{m_{Start}}{m_{Landung}} \quad .$$

Die Reichweite wird groß, wenn der Ausdruck $V_\infty A/W$ große Werte annimmt. Dies ist für gegebenes Gewicht $G = A$ der Fall bei großer Fluggeschwindigkeit V_∞ und kleinem Widerstand W . Bei schallnaher Anströmung treten bei der Umströmung des Flügels Gebiete mit örtlicher Überschallgeschwindigkeit auf. Diese sind meist durch einen Verdichtungsstoß abgeschlossen (Formeln siehe Strömungsmechanik II), in dem die Entropie zunimmt und der bei genügender Stärke (Drucksprung) auch Strömungsablösungen bewirken kann. Der zugehörige Anstieg des Widerstandes kann durch Pfeilung des Flügels zu größeren Flugmachzahlen Ma_∞ hin verschoben werden. Dies führt zum



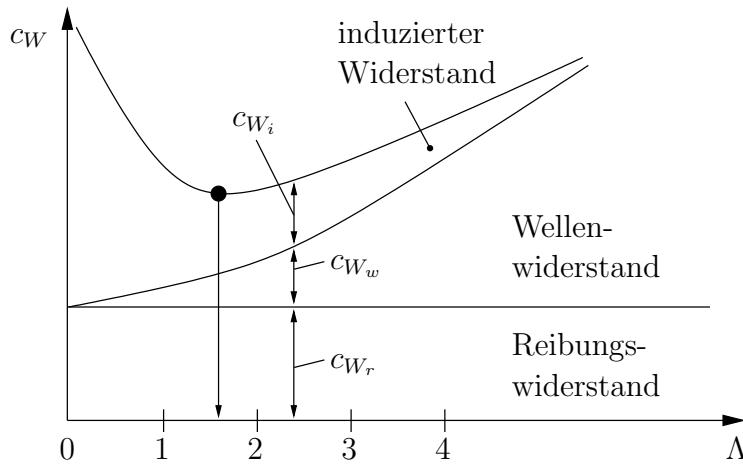
gepfeilten Flügel großer Streckung als zweite Hauptform von Tragflügeln, und zwar für den Flug mit hohen Unterschallmachzahlen $Ma_\infty \approx 1$, wie sie z.B. bei modernen Verkehrsflugzeugen vorliegen.

Flug bei Überschallmachzahlen, $Ma_\infty > 1$

In diesem Fall kommt mit dem Wellenwiderstand W_w ein weiterer Widerstand hinzu, und es gilt

$$W = W_r + W_i + W_w$$

Unter Vorwegnahme von Ergebnissen dieser Vorlesung hängen die Widerstandsanteile wie skizziert vom Seitenverhältnis des Flügels ab:



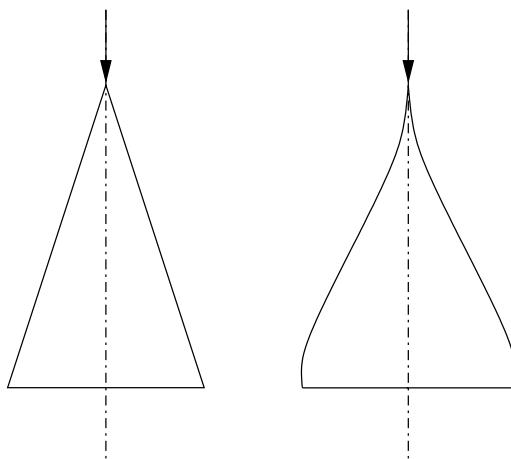
Die Auftragung gilt für

$$Ma_\infty > 1$$

gegebenes Volumen

$$c_A = \text{konst.}$$

Das Minimum des Widerstandes wird bei einem Seitenverhältnis $\Lambda \approx 1.6$ erreicht. Dies führt auf schlanke Flügel (insbesondere Deltaflügel)



als dritte Hauptform von Tragflügeln, und zwar für den Flug bei Überschallmachzahlen. Derartige Flügelformen sind für Überschallverkehrsflugzeuge (Concorde) und auch für Kampfflugzeuge von Bedeutung.

1.1.3 Ermittlung der aerodynamischen Beiwerte

Für die drei Hauptformen von Tragflügeln soll im Rahmen dieser Vorlesung die Nachrechnungsaufgabe gelöst werden. Dabei sind weitere geometrische und aerodynamische Parameter in die Betrachtungen einzubeziehen sowie auch gewisse Beschränkungen vorzunehmen. Diese sind:

Geometrie: Bei den betrachteten Tragflügeln sind als weitere Parameter geometrische und aerodynamische Verwindung sowie symmetrische (η_K , Landeklappen) und antisymmetrische (ξ_K , Querruder) Klappenausschläge in die Betrachtungen einzubeziehen.

Anströmung: Wichtigster Parameter ist der Anstellwinkel α . Unsymmetrische Strömungszustände z.B. infolge eines Schiebewinkels β sollen nur untergeordnet betrachtet werden. Ein weiterer wichtiger Parameter ist die Machzahl der Anströmung Ma_∞ . In dieser Vorlesung soll der Unterschallbereich $0 \leq Ma_\infty \leq 0,8$ und der Überschallbereich $1,2 \leq Ma_\infty \leq 3$ behandelt werden, während der Bereich schallnaher Strömungen $0,8 \leq Ma_\infty \leq 1,2$ in dieser Vorlesung ausgeklammert ist. Bezuglich der Reynoldszahl Re_∞ soll nur der Grenzfall $Re_\infty \rightarrow \infty$ (reibunglose Strömung) betrachtet werden. Die damit vorgenommene Beschränkung bedeutet, dass bezüglich des Reibungswiderstandes W_r keine Aussagen gemacht werden können.

Bewegungen des Flügels: Außer der gleichförmigen Bewegung des Flügels mit konstantem Anstellwinkel $\alpha = const.$ treten auch beschleunigte Bewegungen mit $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ und $\omega_x = p, \omega_y = q, \omega_z = r$ (Drehbewegungen) auf. In dieser Vorlesung sollen zunächst nur stationäre Strömungen behandelt werden. Dies bedeutet, dass überwiegend der Fall des konstanten Anstellwinkels $\alpha = const.$ zu Grunde gelegt wird und dass bei den Drehbewegungen nur der Fall des Rollens (Winkelgeschwindigkeit $\omega_x = p$) hinzukommt, bei dem ebenfalls ein stationärer Strömungszustand vorliegt.

Ergebnisse der Nachrechnung sind

$$\begin{aligned} \text{Druckverteilung} \quad c_p &= \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = f_1(x, y, z, Ma_\infty, \alpha, \dot{\alpha}, \omega_y, \eta_K) \\ \text{örtliche Beiwerthe, Beispiel} \quad c_a &= \frac{dA}{q_\infty l dy} = f_2(y, Ma_\infty, \alpha, \dot{\alpha}, \omega_y, \eta_K) \\ \text{Gesamtbeiwerthe, Beispiel} \quad c_A &= \frac{A}{q_\infty S} = f_3(Ma_\infty, \alpha, \dot{\alpha}, \omega_y, \eta_K) . \end{aligned}$$

In der Aerodynamik werden die Funktionen f_1, f_2 und f_3 in der Regel nicht berechnet. Vielmehr wird eine Taylorentwicklung dieser Funktionen in der Umgebung eines Gleichgewichtszustandes a vorgenommen

$$\begin{aligned} c_A &= c_A(Ma_{\infty a}, \alpha_a, \eta_{K a}, \dot{\alpha}_a = 0, \omega_{y a} = 0) + && \text{Ausgangslage } a \\ &+ \left(\frac{\partial c_A}{\partial Ma_\infty} \right) \Delta Ma_\infty + \left(\frac{\partial c_A}{\partial \alpha} \right) \Delta \alpha + \left(\frac{\partial c_A}{\partial \eta_K} \right) \Delta \eta_K + && \text{stationäre Derivativa} \\ &+ \left(\frac{\partial c_A}{\partial \left(\frac{\dot{\alpha} l_\mu}{V_\infty} \right)} \right) \frac{\dot{\alpha} l_\mu}{V_\infty} + \left(\frac{\partial c_A}{\partial \left(\frac{\omega_y l_\mu}{V_\infty} \right)} \right) \frac{\omega_y l_\mu}{V_\infty} . && \text{instationäre Derivativa} \\ & && c_{A Ma_\infty}, c_{A \alpha}, c_{A \eta_K} \\ & && c_{A \dot{\alpha}}, c_{A y} \end{aligned}$$

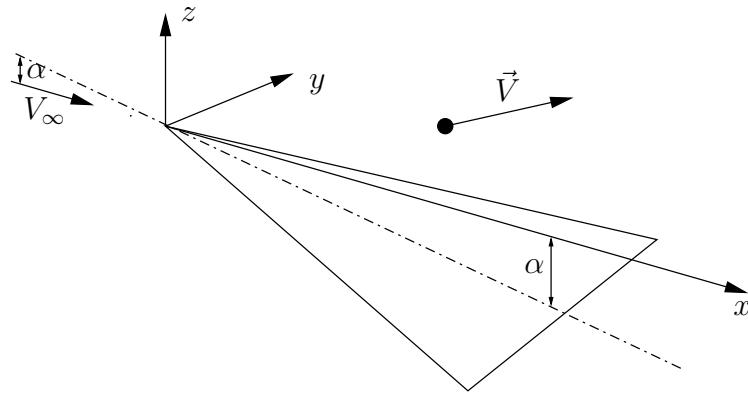
Die Aufgabe der Aerodynamik besteht darin, die auftretenden Derivativa zu ermitteln. In dieser Vorlesung sollen nur stationäre Derivativa betrachtet werden. Dabei steht die

Längsbewegung mit den Beiwerten c_A, c_W (mit Einschränkungen), c_M im Vordergrund. Von den Beiwerten der Seitenbewegung werden nur Rollmoment c_L und Giermoment c_N (mit Einschränkungen) behandelt.

1.2 Grundgleichungen und Hierarchie der Strömungsgleichungen

1.2.1 Allgemeine Potentialgleichung

Bei der Lösung der Nachrechnungsaufgabe seien



Gegeben:

Anströmung $V_\infty = |\vec{V}_\infty|, \alpha$

(V_∞ ist der Betrag der Anströmgeschwindigkeit.)

Machzahl $Ma_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}$

Gesucht:

Reibungslose (isentrope), kompressible, stationäre Strömung $\vec{V}(x, y, z)$ mit $\vec{V} = (U, V, W)$.

Die Reibung geht nur in Form der Kutta'schen Abflussbedingung (glattes Abströmen an der Hinterkante) in die Betrachtungen ein. Die Bewegungsgleichungen für reibungslose, stetige Strömungen (Strömungsmechanik II, erweitert auf 3D-Strömungen) lauten

Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W)}{\partial z} = 0$$

Impulsgleichungen (Euler'sche Bewegungsgleichungen)

$$\begin{aligned} (\vec{V} \nabla) \vec{V} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad \text{oder} \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} . \end{aligned}$$

Reibungslose, adiabate, stetige Strömungen verlaufen isentrop. Deshalb kann der Energiesatz ersetzt werden durch die Beziehung für

Isentrope Zustandsänderung

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const.}$$

Für das 3D Problem liegen also 5 Gleichungen für 5 Unbekannte U, V, W, ρ, p vor. Wie in 2D Strömungen (Strömungsmechanik II) werden die Euler'schen Bewegungsgleichungen für drehungsfreie Strömungen

$$\text{rot } \vec{V} = 0$$

erfüllt, und diese Beziehung wird wiederum durch das Einführen eines Potentials entsprechend

$$\vec{V} = \text{grad } \Phi$$

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x \quad ; \quad V = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_y \quad ; \quad W = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Phi_z$$

befriedigt. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt zunächst

$$\rho \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial V}{\partial y} + V \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial W}{\partial z} + W \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad .$$

Die Dichtegradienten lassen sich auf die Druckgradienten zurückführen, und mit Hilfe der Beziehung für die Schallgeschwindigkeit

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\rho}{a^2} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho}{a^2} \left(U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) \quad . \end{aligned}$$

Setzt man diese Gradienten in die Kontinuitätsgleichung ein, so ergibt sich unter Verwendung der Eulergleichungen

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial U}{\partial x} - \rho \frac{U}{a^2} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \\ &+ \rho \frac{\partial V}{\partial y} - \rho \frac{V}{a^2} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \\ &+ \rho \frac{\partial W}{\partial z} - \rho \frac{W}{a^2} \left(U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Verwendet man beim Zusammenfassen der Glieder noch die Bedingung der Drehungsfreiheit $\text{rot } \vec{V} = 0$, also

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

so folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial x} \left(1 - \frac{U^2}{a^2}\right) + \frac{\partial V}{\partial y} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) + \frac{\partial W}{\partial z} \left(1 - \frac{W^2}{a^2}\right) - \\ & - 2 \frac{UV}{a^2} \frac{\partial U}{\partial y} - 2 \frac{VW}{a^2} \frac{\partial V}{\partial z} - 2 \frac{WU}{a^2} \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Dies ist die Grundgleichung der Gasdynamik. Geht man noch zum Potential über, so erhält man

$$\begin{aligned} & \Phi_{xx} \left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}\right) + \Phi_{yy} \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2}\right) + \Phi_{zz} \left(1 - \frac{\Phi_z^2}{a^2}\right) - \\ & - 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} - 2 \frac{\Phi_y \Phi_z}{a^2} \Phi_{yz} - 2 \frac{\Phi_z \Phi_x}{a^2} \Phi_{zx} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Dies ist die allgemeine Potentialgleichung für reibungslose, kompressible, stetige Strömungen. Es handelt sich um eine nichtlineare, partielle Differentialgleichung für das Potential $\Phi(x, y, z)$. Im Grenzfall inkompressibler Strömung, $Ma_\infty \rightarrow 0$, folgt mit $a \rightarrow \infty$ die lineare Differentialgleichung

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \quad ,$$

und darin ist der bekannte Fall der 2D Strömung (Strömungsmechanik II) enthalten. Die allgemeine Potentialgleichung enthält auch noch die unbekannte Schallgeschwindigkeit $a(x, y, z)$. Deshalb kommt als weitere Gleichung die Bernoulligleichung für kompressible Strömungen

$$a^2 + \frac{\kappa - 1}{2}(U^2 + V^2 + W^2) = a_\infty^2 + \frac{\kappa - 1}{2}V_\infty^2$$

$$a^2 + \frac{\kappa - 1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) = a_\infty^2 + \frac{\kappa - 1}{2}V_\infty^2$$

hinzu, und man hat 2 Gleichungen für die beiden Unbekannten $\Phi(x, y, z)$ und $a(x, y, z)$. Für dieses Gleichungssystem gelten folgende Randbedingungen:

Weit weg vor dem Körper gilt für eine Strömung, bei der die Richtung der Anströmgeschwindigkeit mit der x-Achse zusammenfällt:

$$x \rightarrow -\infty : \Phi_x = U_\infty, \Phi_y = \Phi_z = 0 \quad .$$

Auf der Körperkontur gilt:

$$z_K(x, y) : \Phi_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = V_n = 0 .$$

Dies ist die kinematische Strömungsbedingung. Bei Unterschallströmung kommt als Nebenbedingung noch die Kutta'sche Abflussbedingung (glattes Abströmen an der Hinterkante) hinzu.

Die beiden Gleichungen für Potential $\Phi(x, y, z)$ und Schallgeschwindigkeit $a(x, y, z)$ sind nichtlinear und wegen der Kopplung äußerst kompliziert. Sie sind in allgemeiner Form nicht lösbar, und deshalb besteht die Notwendigkeit, sie für die Umströmung von Tragflügeln zu vereinfachen.

1.2.2 Linearisierung der Potentialgleichung

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass der Tragflügel eine kleine relative Dicke und eine kleine relative Wölbung besitzt und dass er unter einem kleinen Anstellwinkel angeströmt wird. Unter diesen Umständen wird die ankommende Parallelströmung durch den Flügel nur wenig gestört, und man kann zu einer Theorie kleiner Störungen übergehen.

Das Potential lässt sich aufspalten in das Potential der ungestörten Anströmung $U_\infty x$ ¹ und in ein Störpotential $\varphi(x, y, z)$ gemäß

$$\Phi(x, y, z) = U_\infty x + \varphi(x, y, z) .$$

Damit lauten die Ableitungen

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U_\infty + \varphi_x &= U_\infty + u \\ \Phi_y &= \varphi_y &= v \\ \Phi_z &= \varphi_z &= w \\ \Phi_{xx} &= \varphi_{xx} &= u_x & \Phi_{xy} &= \varphi_{xy} &= \varphi_{yx} &= u_y &= v_x \\ \Phi_{yy} &= \varphi_{yy} &= v_y & \Phi_{yz} &= \varphi_{yz} &= \varphi_{zy} &= v_z &= w_y \\ \Phi_{zz} &= \varphi_{zz} &= w_z & \Phi_{zx} &= \varphi_{zx} &= \varphi_{xz} &= w_x &= u_z . \end{aligned}$$

Der Vektor der Störgeschwindigkeit \vec{v} ist

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi$$

mit

$$u = \varphi_x ; \quad v = \varphi_y ; \quad w = \varphi_z .$$

¹Hier wird U_∞ für den Betrag der Anströmgeschwindigkeit verwendet, da diese bei der Linearisierung in x-Richtung zeigt.

Setzt man den Störansatz in die Potentialgleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} & \varphi_{xx} \left(1 - \frac{(U_\infty + \varphi_x)^2}{a^2} \right) + \varphi_{yy} \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2} \right) + \varphi_{zz} \left(1 - \frac{\varphi_z^2}{a^2} \right) - \\ & - 2 \frac{(U_\infty + \varphi_x)\varphi_y}{a^2} \varphi_{xy} - 2 \frac{\varphi_y\varphi_z}{a^2} \varphi_{yz} - 2 \frac{\varphi_z(U_\infty + \varphi_x)}{a^2} \varphi_{zx} = 0 \quad , \end{aligned}$$

und die Bernoulligleichung lautet

$$a^2 + \frac{\kappa - 1}{2} (2U_\infty \varphi_x + \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) = a_\infty^2 \quad .$$

Dies sind nun die nichtlinearen Ausgangsgleichungen für das Störpotential $\varphi(x, y, z)$ und die Schallgeschwindigkeit $a(x, y, z)$. Für die nun folgende Abschätzung der Größenordnung der Glieder dieser Gleichungen ist es ausreichend, den Sonderfall der 2D Strömung zu betrachten. Hierfür lauten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} u_x(a^2 - U_\infty^2 - 2uU_\infty - u^2) + w_z(a^2 - w^2) - 2(U_\infty + u)wu_z &= 0 \\ a^2 = a_\infty^2 - \frac{\kappa - 1}{2}(2uU_\infty + u^2 + w^2) & \quad . \end{aligned}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} & u_x \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \left(2 \frac{u}{U_\infty} + \frac{u^2 + w^2}{U_\infty^2} \right) - Ma_\infty^2 - Ma_\infty^2 \left(2 \frac{u}{U_\infty} + \frac{u^2}{U_\infty^2} \right) \right] + \\ & + w_z \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \left(2 \frac{u}{U_\infty} + \frac{u^2 + w^2}{U_\infty^2} \right) - Ma_\infty^2 \frac{w^2}{U_\infty^2} \right] - 2Ma_\infty^2 \frac{wu_z}{U_\infty} - 2Ma_\infty^2 \frac{uw}{U_\infty^2} u_z = 0 \quad , \end{aligned}$$

wobei

$$Ma_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}$$

gesetzt wurde. Die neue Gleichung gilt noch vollkommen exakt.

Betrachtet man nun kleine Störungen, so lässt sich als erste Näherung einführen

$$Ma_\infty^2 \frac{u^2}{U_\infty^2} \ll 1 \quad ; \quad Ma_\infty^2 \frac{w^2}{U_\infty^2} \ll 1 \quad ; \quad Ma_\infty^2 \frac{uw}{U_\infty^2} \ll 1 \quad .$$

Damit fallen einige Glieder weg, und es bleibt

$$\begin{aligned} & u_x \left[1 - Ma_\infty^2 - (\kappa + 1) Ma_\infty^2 \frac{u}{U_\infty} \right] + \\ & + w_z \left[1 - (\kappa - 1) Ma_\infty^2 \frac{u}{U_\infty} \right] - 2Ma_\infty^2 \frac{w}{U_\infty} u_z = 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Gleichung enthält immer noch nichtlineare Glieder. Eine schärfere Näherung für kleine Störungen ist

$$Ma_{\infty}^2 \frac{u}{U_{\infty}} \ll 1 \quad ; \quad Ma_{\infty}^2 \frac{w}{U_{\infty}} \ll 1 \quad .$$

Diese kann man zunächst teilweise einführen und dabei beachten, dass in schallnahen Strömungen der Term $(\kappa + 1)Ma_{\infty}^2 \frac{u}{U_{\infty}}$ von gleicher Größenordnung ist, wie $1 - Ma_{\infty}^2$. Man erhält:

$$u_x \left[1 - Ma_{\infty}^2 - (\kappa + 1)Ma_{\infty}^2 \frac{u}{U_{\infty}} \right] + w_z - 2Ma_{\infty}^2 \frac{w}{U_{\infty}} u_z = 0 \quad .$$

Diese nichtlineare partielle Differentialgleichung gilt für den Fall kleiner Störungen mit der schärferen Näherung für alle Machzahlen Ma_{∞} . Für weitere Vereinfachungen sind Fallunterscheidungen zu treffen:

Unter- und Überschallströmungen, $Ma_{\infty}^2 < 1$, $Ma_{\infty}^2 > 1$

In diesem Fall können die der schärferen Näherung unterliegenden Glieder vernachlässigt werden, und es bleibt, wenn man wieder zur 3D Strömung übergeht

$$(1 - Ma_{\infty}^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad \text{für } Ma_{\infty} \gtrless 1 \quad .$$

Dies ist die linearisierte Potentialgleichung für kleine Störungen. Sie gilt nicht im Bereich schallnäher Anströmung sowie nicht für höhere Machzahlen der Anströmung Ma_{∞} .

Schallnahe Strömungen, $Ma_{\infty} \approx 1$

In diesem Fall kann der Ausdruck $(\kappa + 1)Ma_{\infty}^2 \frac{u}{U_{\infty}}$ gegenüber $1 - Ma_{\infty}^2$ nicht vernachlässigt werden. Das Glied $2Ma_{\infty}^2 \frac{w}{U_{\infty}} u_z$ kann aber entfallen, weil bei schallnahen Strömungen Störungen in z - Richtung nicht mehr abklingen und mithin $u_z < u_x$ gilt. Es bleibt dann, wenn man wieder zur 3D Strömung übergeht

$$(1 - Ma_{\infty}^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = (\kappa + 1)Ma_{\infty}^2 \frac{\varphi_x}{U_{\infty}} \varphi_{xx} \quad ; \quad Ma_{\infty} \approx 1 \quad .$$

Für schallnahe Strömungen bleibt also auch für den Fall kleiner Störungen eine nichtlineare Potentialgleichung übrig. Der Fall der Schallanströmung $Ma_{\infty} = 1$ ist eingeschlossen

$$(\kappa + 1) \frac{\varphi_x}{U_{\infty}} \varphi_{xx} = \varphi_{yy} + \varphi_{zz} \quad ; \quad Ma_{\infty} = 1 \quad .$$

Infolge der Nichtlinearität der Potentialgleichung sind schallnahe Strömungen sehr schwierig zu behandeln. Deshalb wird im Folgenden der Bereich $0,8 \leq Ma_{\infty} \leq 1,2$ nicht betrachtet.

Im Folgenden soll also die linearisierte Potentialgleichung

$$(1 - Ma_{\infty}^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

für Tragflügelströmungen im Rahmen einer Theorie kleiner Störungen zu Grunde gelegt werden.

Diese Gleichung gilt für

$$\text{Unterschallströmungen } Ma_\infty < 1 : 0 \leq Ma_\infty \leq 0,8$$

$$\text{Überschallströmungen } Ma_\infty > 1 : 1,2 \leq Ma_\infty \leq 3 .$$

In diesen beiden Machzahlbereichen besitzt die linearisierte Potentialgleichung unterschiedlichen mathematischen Charakter. Die Differentialgleichung ist für

$$Ma_\infty < 1: \quad (1 - Ma_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad \text{elliptisch}$$

$$Ma_\infty > 1: \quad (Ma_\infty^2 - 1)\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0 \quad \text{hyperbolisch.}$$

Die Lösungsmethoden für elliptische und hyperbolische Differentialgleichungen sind grundverschieden. Deshalb sind im Folgenden die Unterschall- und die Überschallströmungen getrennt zu behandeln.

Für schlanke Körper, deren Seitenverhältnis ($\Lambda \rightarrow 0$) sehr klein ist, lässt sich die linearisierte Potentialgleichung noch weiter vereinfachen. Wie in Kapitel 4 dieser Vorlesung gezeigt wird, entfällt dann das erste Glied in der Potentialgleichung, und es bleibt

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

für schlanke Körper im Unter- und Überschallbereich, unabhängig von der Machzahl. Dieser Theorie schlanker Körper wird im Rahmen dieser Vorlesung ein eigenes Kapitel gewidmet.

1.2.3 Linearisierung der Randbedingungen

Die Randbedingungen für die Lösung der Potentialgleichung lauten

Weit weg vom Körper:

$$x \rightarrow -\infty ; \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0 .$$

Auf der Körperkontur:

$$z = z_K(x, y) \quad ; \quad \vec{V}\vec{n} = \begin{pmatrix} U_\infty + u \\ v \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial z_K / \partial x \\ \partial z_K / \partial y \\ -1 \end{pmatrix} = 0 .$$

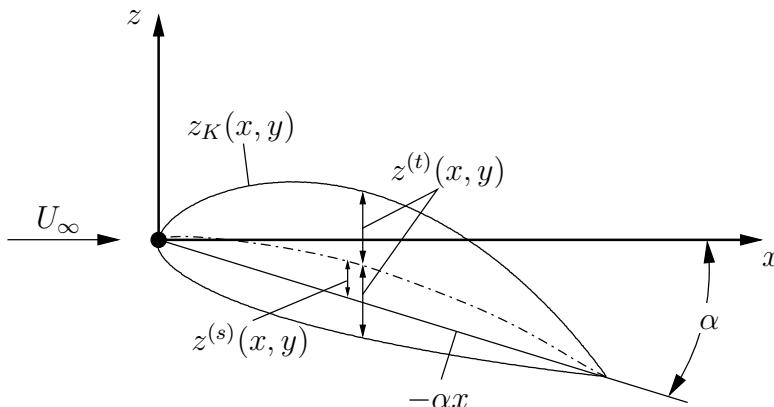
Dabei ist \vec{n} der Vektor der äußeren Normalen zur Kontur $z_K(x, y)$. Die Randbedingung am Körper lautet also

$$(U_\infty + u) \frac{\partial z_K}{\partial x} + v \frac{\partial z_K}{\partial y} - w = 0 \quad .$$

Dies ist die kinematische Strömungsbedingung. Für kleine Konturneigungen $\frac{\partial z_K}{\partial x}$ und $\frac{\partial z_K}{\partial y}$ können im Rahmen einer Theorie kleiner Störungen die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden, und es bleibt die vereinfachte (linearisierte) Randbedingung am Körper

$$U_\infty \frac{\partial z_K}{\partial x} - w = 0 \quad .$$

Sie entspricht der kinematischen Strömungsbedingung in 2D Strömung im Schnitt $y = const.$ Sie gilt nicht in der Umgebung eines Staupunktes, weil dort $|u| \not\propto U_\infty$.



Darstellung der geometrischen Verhältnisse in einem Schnitt $y = const.$

Falls relative Dicke, relative Wölbung und Anstellwinkel α klein sind, lässt sich die Körperkontur $z_K(x, y)$ additiv zusammensetzen aus einem angestellten Skelett $z^{(s)}(x, y)$ und einem symmetrischen Tropfen $z^{(t)}(x, y)$ entsprechend

$$z_K(x, y) = -\alpha x + z^{(s)}(x, y) \pm z^{(t)}(x, y) \quad .$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial z_K}{\partial x} = -\alpha + \frac{\partial z^{(s)}}{\partial x} \pm \frac{\partial z^{(t)}}{\partial x} \quad .$$

Setzt man dies in die kinematische Strömungsbedingung ein und spaltet man die Störgeschwindigkeit $w(x, y)$ in einen vom angestellten Skelett induzierten und einen vom Tropfen hervorgerufenen Anteil auf, so ergibt sich für die Randbedingung

$$-\alpha + \frac{\partial z^{(s)}}{\partial x} \pm \frac{\partial z^{(t)}}{\partial x} = \frac{w}{U_\infty} = \frac{w^{(s)}}{U_\infty} \pm \frac{w^{(t)}}{U_\infty} \quad .$$

Diese Gleichung lässt sich aufspalten in

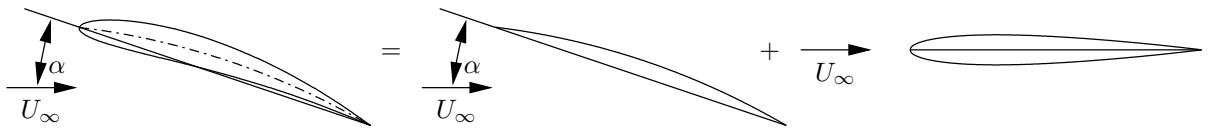
$$\frac{\partial z^{(s)}}{\partial x} = \alpha + \frac{w^{(s)}}{U_\infty} \quad \text{Angestellte Skelettfläche, Auftriebsproblem}$$

und

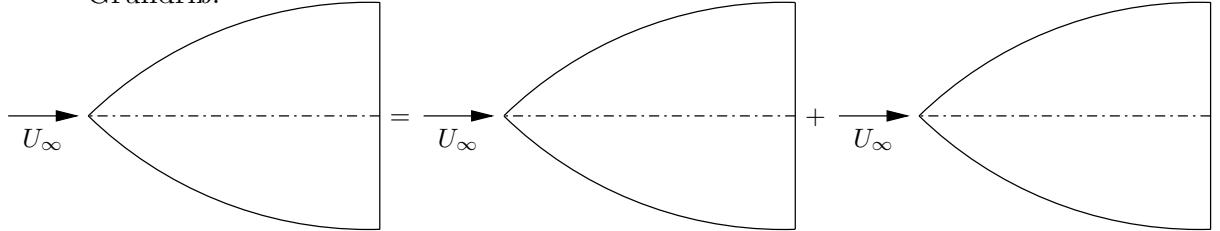
$$\frac{\partial z^{(t)}}{\partial x} = \frac{w^{(t)}}{U_\infty} . \quad \text{Symmetrischer Verdrängungskörper, Dickenproblem}$$

Die Aufspaltung der Randbedingung bedeutet, dass die Strömung um einen angestellten, dicken Tragflügel additiv zusammengesetzt werden kann aus der Strömung um eine angestellte Skelettfläche und der Strömung um einen symmetrischen Verdrängungskörper:

Aufriß:



Grundriß:



Im Folgenden sollen daher Auftriebsproblem und Dickenproblem getrennt behandelt werden.

1.2.4 Vereinfachung der Druckbeziehung

Für den dimensionslosen Druckbeiwert c_p gilt

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2} V_\infty^2} = \frac{2(p - p_\infty)}{\kappa p_\infty Ma_\infty^2} = \frac{2}{\kappa Ma_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) ,$$

wobei unter Verwendung der Laplacegleichung für die Schallgeschwindigkeit $a^2 = \kappa p / \rho$

$$\rho_\infty a_\infty^2 = \rho_\infty \kappa \frac{p_\infty}{\rho_\infty} = \kappa p_\infty$$

gesetzt wurde.

Der Druck ergibt sich aus der Bernoulligleichung für kompressible Strömungen (Strömungsmechanik II). Die Formel von St. Venant/Wantzel lässt sich auf die Form

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \left(2\frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{V_\infty^2} \right) \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

bringen.

Damit folgt für den Druckbeiwert c_p

$$c_p = \frac{2}{\kappa Ma_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \left(2\frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{V_\infty^2} \right) \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right\} .$$

Diese Gleichung gilt exakt. Für den Fall kleiner Störungen lassen sich Vereinfachungen vornehmen. Mit einem Reihenansatz können die Potenzen der Störgeschwindigkeit in lineare Anteile, sowie quadratische und höhere Glieder entwickelt werden [5].

Vernachlässigt man auch die quadratischen und höheren Glieder, so folgt

$$c_p = -2\frac{u}{V_\infty} .$$

Der Druckbeiwert ist somit proportional zur Störgeschwindigkeit u/V_∞ , und dieses Ergebnis gilt unabhängig von der Machzahl für inkompressible und kompressible Strömungen.

1.3 Affinitätsgesetze

1.3.1 Göthert'sche Regel

Die linearisierte Potentialgleichung für Unter- und Überschallströmungen

$$(1 - Ma_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

lässt sich durch eine geeignete Transformation für

$Ma_\infty < 1$, elliptische Differentialgleichung, auf $Ma_\infty = 0$

$Ma_\infty > 1$, hyperbolische Differentialgleichung, auf $Ma_\infty = \sqrt{2}$

zurückführen. Die Transformation lautet

$$\boxed{\begin{aligned}x' &= x \\y' &= c_1 y \quad ; \quad z' = c_1 z \\ \varphi' &= \frac{1}{c_2} \varphi \quad ; \quad U'_\infty = U_\infty^2\end{aligned}}$$

Es wird eine Vergleichsströmung mit dem Störpotential φ' berechnet für eine Geometrie, die gegenüber dem gegebenen Flügel in y- und z-Richtung mit demselben Faktor c_1 gestreckt oder gestaucht ist (affine Verzerrung).

Setzt man die Transformation in die Potentialgleichung ein, so folgt

$$c_2 [(1 - Ma_\infty^2) \varphi'_{x'x'} + c_1^2 \varphi'_{y'y'} + c_1^2 \varphi'_{z'z'}] = 0 \quad .$$

Wählt man

$$\begin{aligned}c_1^2 &= |1 - Ma_\infty^2| \\c_1 &= \sqrt{|1 - Ma_\infty^2|} \quad ,\end{aligned}$$

so tritt die Machzahl der Anströmung nicht mehr auf, und für die Vergleichsströmung ('') ist folgende Gleichung zu lösen

$$Ma_\infty < 1 : \varphi'_{x'x'} + \varphi'_{y'y'} + \varphi'_{z'z'} = 0 \quad .$$

Dies ist die Potentialgleichung für inkompressible Strömung $Ma'_\infty = 0$. Sie ist vom elliptischen Typ.

$$Ma_\infty > 1 : \varphi'_{x'x'} - \varphi'_{y'y'} - \varphi'_{z'z'} = 0 \quad .$$

Dies ist die Potentialgleichung für eine Überschallströmung mit $Ma'_\infty = \sqrt{2}$. Es ist die Wellengleichung; sie ist vom hyperbolischen Typ.

Der transformierte Flügel (''), für den die Rechnungen durchzuführen sind, ist in seinem Grundriss verändert

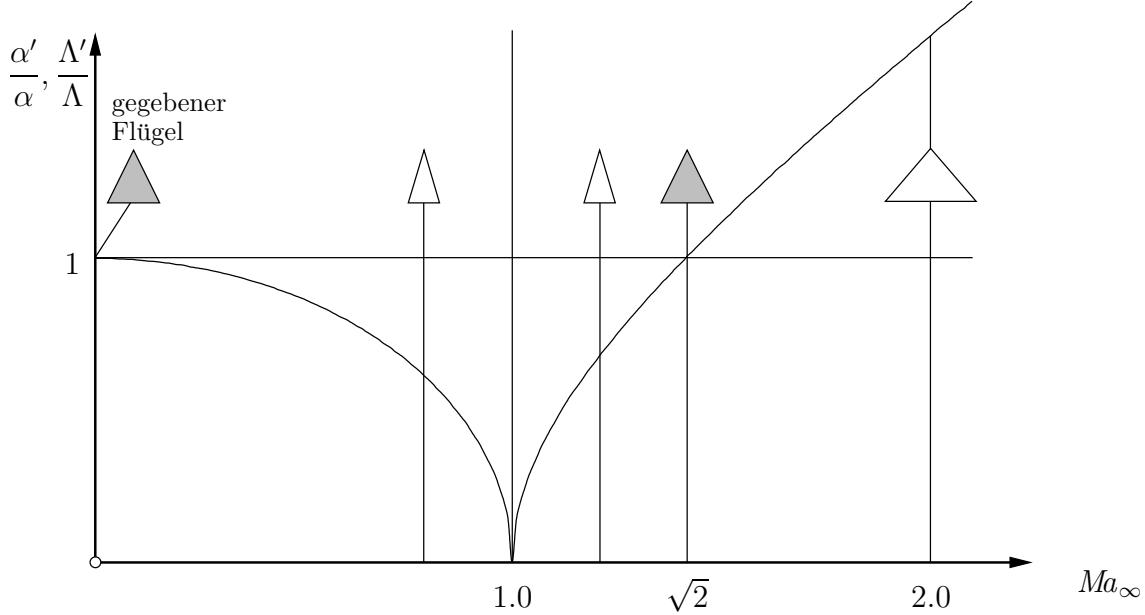
$$\begin{aligned}\Lambda' &= \sqrt{|1 - Ma_\infty^2|} \Lambda \\ \lambda' &= \lambda \quad ,\end{aligned}$$

²Auch hier wird wieder angenommen, dass die Anströmung in x-Richtung zeigt, somit wird der Betrag der Anströmung mit U_∞ bezeichnet.

und seine Umströmung ist für einen veränderten Anstellwinkel

$$\alpha' = \sqrt{|1 - Ma_\infty^2|} \alpha$$

zu berechnen. Das Aussehen des transformierten Flügels lässt sich wie folgt darstellen:



Die zu berechnenden transformierten Flügel besitzen im Bereich $0 \leq Ma_\infty < \sqrt{2}$ ein kleineres und für $Ma_\infty > \sqrt{2}$ ein größeres Seitenverhältnis Λ' im Vergleich zum vorgegebenen Flügel Λ . In gleicher Weise verändert sich auch der Anstellwinkel α' im Vergleich zum gegebenen Anstellwinkel α . Als Lösung der transformierten Potentialgleichung erhält man das Potential $\varphi'(x', y', z')$ und daraus abgeleitet die Störgeschwindigkeiten $u' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$, $v' = \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}$ und $w' = \frac{\partial \varphi'}{\partial z'}$ und den Druckbeiwert $c'_p = -\frac{2u'}{U'_\infty}$. Die Rücktransformation dieser Ergebnisse auf den Originalflügel erfolgt mit Hilfe des Transformationsfaktors c_2 . Dieser wird aus der kinematischen Strömungsbedingung ermittelt. Diese lautet für den

$$\begin{aligned} \text{Originalflügel} \quad : \quad & \frac{\partial z_K}{\partial x} = \frac{w}{U_\infty} = \frac{\varphi_z}{U_\infty} \\ \text{Transform. Flügel} \quad : \quad & \frac{\partial z'_K}{\partial x'} = \frac{w'}{U'_\infty} = \frac{\varphi'_{z'}}{U'_\infty} \end{aligned}$$

Setzt man $U'_\infty = U_\infty$ und die Transformation in die zweite Gleichung ein

$$c_1 \frac{\partial z_K}{\partial x} = \frac{1}{U_\infty} \frac{1}{c_2} \frac{1}{c_1} \varphi_z \quad ,$$

so geht diese in die erste Gleichung über, falls

$$c_1^2 c_2 = 1$$

gilt. Somit ist

$$c_2 = \frac{1}{c_1^2} = \frac{1}{|1 - Ma_\infty^2|} \quad .$$

Für den Druckbeiwert gilt am

$$\begin{aligned} \text{Originalflügel} & : c_p = -2 \frac{u}{U_\infty} = -2 \frac{\varphi_x}{U_\infty} \\ \text{Transform. Flügel} & : c'_p = -2 \frac{u'}{U'_\infty} = -2 \frac{\varphi'_{x'}}{U'_\infty} = -2 \frac{1}{c_2} \frac{\varphi_x}{U_\infty} . \end{aligned}$$

Mithin besteht der Zusammenhang

$$c_p = c_2 c'_p ,$$

und für die Druckverteilung am Originalflügel gilt

$$c_p = \frac{c'_p}{|1 - Ma_\infty^2|} .$$

Diese Zusammenhänge wurden zuerst von B. Göthert (1941, DVL Berlin-Adlershof) gefunden. Die angegebene Gleichung nennt man die Göthert'sche Regel (Goethert's rule). Sie lässt sich wie folgt zusammenfassen:

Aus dem vorgegebenen Tragflügel wird ein transformierter Tragflügel ('') gebildet derart, dass seine Abmessungen in y- und z-Richtung mit dem Faktor $\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}$ multipliziert werden, während seine Abmessungen in x-Richtung unverändert bleiben:

Grundriss:	$x' = x$	Profilschnitt:	$z' = \sqrt{ 1 - Ma_\infty^2 } z$
	$y' = \sqrt{ 1 - Ma_\infty^2 } y$		$\alpha' = \sqrt{ 1 - Ma_\infty^2 } \alpha$
	$l' = l$		$(d/l)' = \sqrt{ 1 - Ma_\infty^2 } (d/l)$
	$\Lambda' = \sqrt{ 1 - Ma_\infty^2 } \Lambda$		$(f/l)' = \sqrt{ 1 - Ma_\infty^2 } (f/l)$
	$\cot \varphi'_v = \sqrt{ 1 - Ma_\infty^2 } \cot \varphi_v$		
	$\lambda' = \lambda$		

(φ_v = Pfeilungswinkel der Vorderkante).

Für den so transformierten Flügel berechnet man die Strömung bei $Ma'_\infty = 0$ falls Unterschallströmung $Ma_\infty < 1$ vorliegt und bei $Ma'_\infty = \sqrt{2}$ falls Überschallströmung $Ma_\infty > 1$ vorliegt. Die Druckverteilung und die aerodynamischen Beiwerte des vorgegebenen Flügels bei der vorgegebenen Machzahl Ma_∞ erhält man aus

$$c_p = \frac{c'_p}{|1 - Ma_\infty^2|} ; \quad c_A = \frac{c'_A}{|1 - Ma_\infty^2|} ; \quad c_M = \frac{c'_M}{|1 - Ma_\infty^2|}$$

$$\frac{dc_A}{d\alpha} = \frac{(dc_A/d\alpha)'}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}} ; \quad \alpha_0 = \frac{\alpha'_0}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}} .$$

1.3.2 Prandtl - Glauert - Ackeret'sche Regel

Soll mit der Göthert'schen Regel der Einfluss der Machzahl Ma_∞ auf die Druckverteilung eines Tragflügels berechnet werden, so ist die Anwendung sehr umständlich, weil in der Gleichung

$$c_p = \frac{c'_p(Ma_\infty)}{|1 - Ma_\infty^2|}$$

der Zähler c'_p dadurch von der Machzahl Ma_∞ abhängig ist, dass sich mit wachsender Machzahl die Geometrie des transformierten Flügels ändert, und zwar in y- und z-Richtung. Die Machzahlabhängigkeit für eine gegebene Geometrie kann daher nur punktweise berechnet werden. Diesem Mangel kann teilweise abgeholfen werden, indem ein Affinitätsgesetz für inkompressible Strömung ($Ma'_\infty = 0$) und für Überschallströmungen ($Ma'_\infty = \sqrt{2}$) verwendet wird. In beiden Fällen gilt für Profile und für relativ dünne Tragflügel ein Affinitätsgesetz der Form, dass der Druckbeiwert c_p den relativen Abmessungen in z-Richtung proportional ist, also

$$c_p \sim \frac{d}{l} \quad \text{und} \quad c_p \sim \alpha \quad .$$

Dies gilt aber nur für Profile und dünne Tragflügel, bei denen die Abmessungen in z-Richtung sehr viel kleiner sind als die in x- und y-Richtung. Das Affinitätsgesetz versagt z.B. für Rotationskörper, für die $c_p \sim d/l$ nicht gilt. Wendet man das Affinitätsgesetz an, so können die Vergleichsrechnungen statt beim veränderten Profil (d'/l' und α') beim Originalprofil (d/l und α) durchgeführt werden. Man rechnet also für

$$z'' = z = \frac{z'}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}} \quad \text{und} \quad \alpha'' = \alpha = \frac{\alpha'}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}}$$

und erhält dann aus der Vergleichsrechnung ("') entsprechend dem Affinitätsgesetz einen Druckbeiwert

$$c''_p = \frac{c'_p}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}} \quad .$$

Setzt man dies in die Göthert'sche Regel ein, so folgt

$$c_p = \frac{c'_p}{|1 - Ma_\infty^2|} = \frac{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|} c''_p}{|1 - Ma_\infty^2|} = \frac{c''_p}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}} \quad .$$

Diese Fassung des Affinitätsgesetzes nennt man die Prandtl-Glauert-Ackeret'sche Regel. Sie lässt sich wie folgt zusammenfassen: Aus dem vorgegebenen Tragflügel wird ein trans-

formierter Tragflügel ("') gebildet derart, dass nur seine Abmessungen in y-Richtung mit dem Faktor $\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}$ multipliziert werden, während seine Abmessungen in x- und z-Richtung unverändert bleiben:

Grundriss:

$$\begin{aligned} x'' &= x \\ y'' &= \sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}y \\ \Lambda'' &= \sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}\Lambda \\ \cot \varphi_v'' &= \sqrt{|1 - Ma_\infty^2|} \cot \varphi_v \\ \lambda'' &= \lambda \end{aligned} \quad \begin{aligned} z'' &= z \\ \alpha'' &= \alpha \\ (d/l)'' &= d/l \\ (f/l)'' &= f/l \end{aligned} .$$

Für den so transformierten Flügel berechnet man die Strömung bei $Ma_\infty'' = 0$ falls Unterschallströmung $Ma_\infty < 1$ vorliegt und bei $Ma_\infty'' = \sqrt{2}$ falls Überschallströmung $Ma_\infty > 1$ vorliegt.

Die Druckverteilung und die aerodynamischen Beiwerte des vorgegebenen Flügels bei der vorgegebenen Machzahl Ma_∞ erhält man dann aus

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{c_p''}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}} ; \quad c_A = \frac{c_A''}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}} ; \quad c_M = \frac{c_M''}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}} \\ \frac{dc_A}{d\alpha} &= \frac{(dc_A/d\alpha)''}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}} ; \quad \alpha_0 = \alpha_0'' \end{aligned}$$

Gegenüber der Göthert'schen Regel ist die Berechnung dadurch vereinfacht, dass die Betrachtung veränderter Profile und veränderter Anstellwinkel entfällt. Trotzdem bleibt die mit der Änderung der Machzahl Ma_∞ verbundene Änderung des Flügelgrundrisses. In 3D Strömung ist also auch in der neuen Fassung

$$c_p = \frac{c_p''}{\sqrt{|1 - Ma_\infty^2|}}$$

der Zähler c_p'' eine Funktion von Ma_∞ und damit von Λ'' , und Machzahlabhängigkeiten können wieder nur punktweise berechnet werden. Lediglich im Sonderfall der 2D Strömung entfällt die Koordinatentransformation in y-Richtung, und c_p'' ist eine Konstante, die nur einmal bestimmt werden muss. Die Gleichung gibt dann den Machzahleinfluss analytisch an.

1.4 Einteilung der Tragflügeltheorie

Auf Grund der bisherigen Einführung lässt sich die Tragflügeltheorie entsprechend der beigefügten Tabelle einteilen. Dabei ergeben sich folgende Gesichtspunkte:

$\Lambda \backslash Ma_\infty$	Inkompressibel $Ma_\infty = 0$ $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$ linear	Unterschallströmung $0 \leq Ma_\infty \lesssim 0,8$ $(1 - Ma_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$ linearisiert	Schallnahe Strömung $0,8 \lesssim Ma_\infty \lesssim 1,2$ nicht linear	Überschallströmung $1,2 \lesssim Ma_\infty \leq 3,0$ $(Ma_\infty^2 - 1)\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0$ linearisiert	Hyperschallströmung $3,0 \leq Ma_\infty$ nicht linear
$\Lambda = \infty$ Profile	1) Singularitätenmethoden 2) Konforme Abbildung (Vorlesung Profilaerodynamik)	Affinitätsgesetz (Göthert-, Prandtl-Glauert-Regel) — Methoden siehe $Ma_\infty = 0$	Vorlesungen Profilaerodynamik und Konfigurations-aerodynamik	Affinitätsgesetz (Göthert-, Ackeret-Regel) Lösung analytisch $Ma_\infty = \sqrt{2}$	
$1 < \Lambda < \infty$ Trag-flügel-theorie	1) Ungepfeilte Flügel großer Streckung (Prandtl, Multhopp) 2) Pfeilflügel beliebiger Streckung Wirbelleiterverfahren Panelverfahren	Affinitätsgesetz (Göthert-, Prandtl-Glauert-Regel) — Methoden siehe $Ma_\infty = 0$		Affinitätsgesetz (Göthert-, Ackeret-Regel) Methoden bei $Ma_\infty = \sqrt{2}$ Theorie kegeliger Strömungen (Busemann)	
$0 < \Lambda < 1$ Theorie schlanker Körper	Auftriebsproblem				

Tabelle: Einteilung der Tragflügeltheorie

Inkompressible Strömung, $Ma_\infty = 0$

In diesem Fall ist die Potentialgleichung linear. Die Lösung für das 2D Problem (Profile) mit den in der Tabelle angegebenen Methoden wird in der Vorlesung Aerodynamik II behandelt. Die Lösung für das 3D Problem (Tragflügel endlicher Spannweite) ist Gegenstand dieser Vorlesung, wobei auch der Sonderfall sehr kleiner Flügelstreckungen im Rahmen der Theorie schlanker Körper behandelt werden soll.

Unterschallströmungen, $0 \leq Ma_\infty \lesssim 0,8$

Im Rahmen der Theorie kleiner Störungen gilt die linearisierte Potentialgleichung. Die Unterschallströmungen lassen sich unter Verwendung der Göthert- oder der Prandtl-Glauert-Regel auf den Fall der inkompressiblen Strömung, $Ma_\infty = 0$, transformieren. Die dort entwickelten Berechnungsmethoden besitzen damit über den Fall der inkompressiblen Strömung hinaus allgemeinere Bedeutung. Die Ergebnisse der Theorie schlanker Körper sind von der Machzahl unabhängig beim Auftriebsproblem, während beim Dickenproblem eine Machzahlabhängigkeit besteht, die für den Unterschallbereich berechnet werden kann.

Schallnahe Strömungen, $0,8 \lesssim Ma_\infty \lesssim 1,2$

Auch im Rahmen einer Theorie kleiner Störungen bleibt die Potentialgleichung nicht linear. Für 3D Tragflügelströmungen bei schallnahen Geschwindigkeiten bietet die Theorie schlanker Körper einen gewissen Zugang beim Auftriebsproblem, der jedoch beim Dickenproblem nicht gegeben ist.

Überschallströmungen, $1,2 \lesssim Ma_\infty \lesssim 3,0$

Im Rahmen der Theorie kleiner Störungen gilt wieder die linearisierte Potentialgleichung. Unter Verwendung der Göthert- oder der Ackeret-Regel lassen sich alle Überschallströmungen dieses Machzahlbereichs auf den Fall $Ma_\infty = \sqrt{2}$ transformieren. Die hierfür entwickelten Berechnungsmethoden besitzen damit allgemeinere Bedeutung. Für 2D Strömungen existiert eine analytische Lösung (D'Alembert'sche Lösung). Die für 3D Strömungen in der Tabelle angegebenen Methoden werden im Rahmen dieser Vorlesung dargestellt. Wegen der Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Machzahl beim Auftriebsproblem gelten die Ergebnisse der Theorie schlanker Körper auch im Überschallbereich, und auch die Machzahlabhängigkeit beim Dickenproblem lässt sich berechnen.

Strömungen bei hohen Überschall und im Hyperschall, $Ma_\infty > 3,0$

Bei hohen Überschallgeschwindigkeiten, $Ma_\infty > 3$, ist die Potentialgleichung nicht linear. Bei sehr großen Überschallmachzahlen, $Ma_\infty > 5$, kommen zur Nichtlinearität der Ausgangsgleichungen noch reale Gaseffekte in Form von Dissoziation und Ionisation hinzu. Derartige Probleme werden in den Vorlesungen über Hyperschallströmungen behandelt.

1.5 Literatur zu Kapitel 1

- [1] J. D. Anderson jr.: Modern Compressible Flow, Second Edition. McGraw Hill New York, 1990.
- [2] J. D. Anderson jr.: Fundamentals of Aerodynamics, Second Edition. McGraw Hill New York, 1991.
- [3] J. Katz, A. Plotkin: Low-Speed Aerodynamics, Second Edition. Cambridge University Press, 2001.
- [4] K. Oswatitsch: Grundlagen der Gasdynamik. Springer Verlag Wien, 1976.
- [5] H. Schlichting, E. Truckenbrodt: Aerodynamik des Flugzeuges, Band I/II, 3. Auflage. Springer Verlag Berlin, 2001.

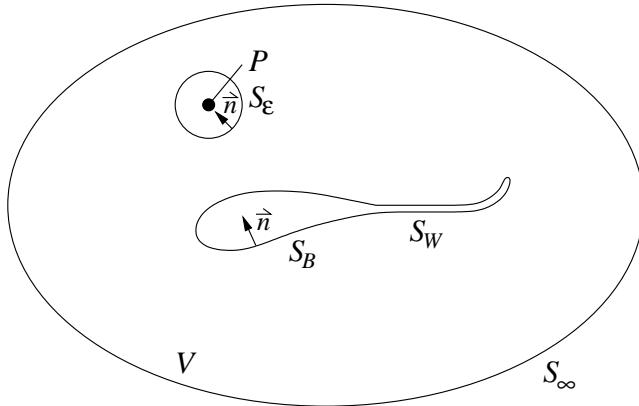
2 Der Tragflügel bei Unterschallgeschwindigkeit

Mit Hilfe der Göthert- oder der Prandtl-Glauert-Regel lassen sich alle Unterschallströmungen auf den Fall der inkompressiblen Strömung, $Ma_\infty = 0$, transformieren. Zur Behandlung von Unterschallströmungen wird daher im Folgenden lediglich der Fall $Ma_\infty = 0$ betrachtet.

2.1 Allgemeine Lösung für das Störpotential

2.1.1 Formulierung der Aufgabenstellung

Gesucht: Strömungslösung für Gebiet V , das einen oder mehrere aerodynamische Körper enthält.



Für inkompressible, drehungsfreie Strömung gilt die Laplace-Gleichung für das Störpotential

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad .$$

Die kinematische Strömungsbedingung lautet

$$\nabla \varphi \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = -\vec{n} \cdot \vec{V}_\infty \quad .$$

mit dem Vektor der Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen, \vec{V}_∞ . Im Unendlichen verschwinden die Störgeschwindigkeiten infolge der Umströmung:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \varphi = 0 \quad ,$$

2.1.2 Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung für das Störpotential baut auf dem Gauß'schen Theorem auf, das den Gradienten eines beliebigen Vektors \vec{q} im Kontrollvolumen V mit dem Fluss über die Berandung S in Beziehung setzt:

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{q} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{q} dV \quad \text{Gauß-Theorem}$$

und daraus hergeleitet das Green'sche Theorem für zwei skalare Funktionen Φ_1, Φ_2 :

$$\int_S (\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1) \cdot \vec{n} dS = \int_V (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1) dV$$

In dem Gebiet zwischen dem Körper S_B und der äußeren Berandung seien die folgenden Potentialfunktionen definiert:

φ und

$\varphi_1 = \frac{1}{r}$, r ist der Abstand zu P ,

S_ϵ ist die Berandung im kleinen Abstand ϵ um P

$$S = S_B + S_W + S_\infty$$

Aus φ, φ_1 kann ein Vektor $\frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r}$ definiert werden. Bei der Anwendung des Gauß-Theorems wird die Umgebung von P, V_ϵ , ausgenommen:

$$\int_{S+S_\epsilon} \vec{n} \cdot \left(\frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) dS = \int_{V-V_\epsilon} \left(\frac{1}{r} \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \varphi_1 \right) dV = 0$$

da φ, φ_1 die Laplace-Gleichung erfüllen.

Ein lokales, kugeliges Koordinatensystem um P zur Auswertung der Integranden des Oberflächenintegrals über S_ϵ liefert:

\vec{e}_r Einheitsvektor zeigt von P weg

$$\vec{n} \cdot \nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\left(\frac{1}{r^2}\right) \vec{e}_r = \frac{1}{r^2} \vec{n} \quad \text{also:}$$

$$-\int_{S_\epsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r^2} \right) dS + \int_S \left(\frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} dS = 0$$

Abschätzung des ersten Integrals:

$$\int_{S_\epsilon} dS = 4\pi\epsilon^2 \quad , \quad r = \epsilon$$

für kleine ϵ können Gradienten von φ vernachlässigt werden: $\partial\varphi/\partial r = 0$ und

$$-\int_{S_\epsilon} \left(\frac{\varphi}{r^2} \right) dS = -\frac{\varphi}{\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 = -4\pi\varphi(P)$$

Damit ergibt sich

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} dS \quad .$$

Das ist die gesuchte Potentialfunktion für einen beliebigen Aufpunkt P in V , enthält φ , $\partial\varphi/\partial n$ an den Rändern S .

Eine weitere Lösung für das Störpotential kann für eine Strömung innerhalb von S_B angegeben werden. Es wird der Fall betrachtet, bei dem P mit S_ϵ außerhalb von S_B liegt: Dann gilt innerhalb für das Störpotential φ_i wiederum nach Anwendung des Gauß-Theorems

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left(-\frac{1}{r} \nabla \varphi_i + \varphi_i \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} dS \quad .$$

Addition der letzten zwei Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\frac{1}{r} \nabla (\varphi - \varphi_i) - (\varphi - \varphi_i) \nabla \frac{1}{r} \right] \cdot \vec{n} dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{S_W + S_\infty} \left(\frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} dS \quad . \end{aligned}$$

Wenn S_∞ weit von S_B entfernt ist, kann

$$\varphi_\infty(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \left(\frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} dS$$

als Störpotential der Anströmung aufgefasst werden. Mit $\vec{v} = 0$ für $r \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\varphi_\infty(P) = C \quad .$$

Für das Oberflächenintegral des Nachlaufs S_W gilt:

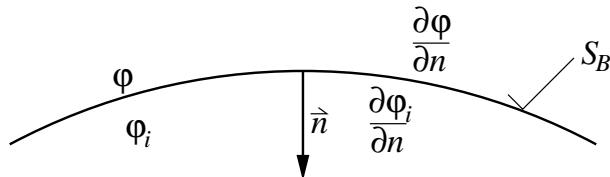
- Nachlauf ist dünn,
- Nachlauf ist kräftefrei,
- Geschwindigkeitsvektor verläuft kontinuierlich über Nachlauf,

also ist $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ kontinuierlich über Nachlauf.

Damit heben sich bei der Integration über Ober- und Unterseite des Nachlaufs die Beiträge des Terms $\frac{1}{r} \nabla \varphi \cdot \vec{n}$ auf.

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\frac{1}{r} \nabla (\varphi - \varphi_i) - (\varphi - \varphi_i) \nabla \frac{1}{r} \right] \cdot \vec{n} dS \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{S_W} \varphi \vec{n} \cdot \nabla \frac{1}{r} dS + \varphi_\infty(P)\end{aligned}$$

Der resultierende Verlauf des Störpotentials an S_B ist:



Offensichtlich ist das Strömungsproblem nach dieser Gleichung gelöst, wenn es gelingt, die Störpotentiale und ihre Ableitungen am Rand zu bestimmen. Die Differenzen in den Gradienten der Störpotentiale werden als Potentialquelle bezeichnet,

$$-\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ,$$

und die Differenzen der Störpotentiale als Dipol:

$$-\mu = \varphi - \varphi_i .$$

Damit ist die allgemeine Lösung des Störpotentials

$$\begin{aligned}\varphi(P) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_W} \mu \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS + \varphi_\infty(P) .\end{aligned}$$

Im Integral des Nachlaufs ist μ nicht als $-\mu = \varphi - \varphi_i$ definiert, sondern μ ist die Potentialdifferenz zwischen oberer und unterer Nachlauffläche. Nach dieser Interpretation ist das Integral über den Nachlauf von der Hinterkante des Körpers bis zum Ende des Nachlaufs stromabwärts zu nehmen. Der Vektor \vec{n} zeigt normal zur Oberfläche und somit gilt $\vec{n} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial n}$. Die allgemeine Lösung kann also auch geschrieben werden:

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_W} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + \varphi_\infty(P) .$$

Die Beträge von Quellen und Dipolen verschwinden mit $r \rightarrow \infty$ und somit wird die Randbedingung im Unendlichen erfüllt (vgl. Kapitel 2.1.1). Für die Lösung des Strömungsproblems müssen die Quell- und Dipolverteilungen auf der Oberfläche so bestimmt werden, dass die kinematische Strömungsbedingung erfüllt wird. Zur Lösung sind verschiedene Kombinationen von σ und μ prinzipiell möglich.

Für $r \rightarrow 0$ werden die Geschwindigkeiten von Quellen und Dipolen singulär, daher der Name Singularitäten.

2.1.3 Deutung von punktförmigen Singularitäten

2.1.3.1 Quellsingularität σ

Das Störpotential einer punktförmigen Quelle mit dem Punkt im Ursprung des Koordinatensystems ist nach der allgemeinen Lösung

$$\varphi_Q = -\frac{\sigma}{4\pi r} .$$

Die Quellergiebigkeit $\sigma \left[\frac{m^3}{s} \right]$ entspricht hier einem Volumenstrom, der im Ursprung erzeugt wird.

Es werden nun die Ableitungen des Störpotentials in Kugelkoordinaten mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\Theta, \vec{e}_\vartheta$ in radialer Richtung und den Richtungswinkeln Θ und ϑ betrachtet. Der Gradientenoperator

$$\nabla = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)$$

liefert den Vektor der Störgeschwindigkeit

$$\vec{v} = \nabla \varphi_Q = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\Theta \\ v_\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma / 4\pi r^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Die von der punktförmigen Quelle induzierte Geschwindigkeit hat nur eine radiale Komponente und nimmt mit $1/r^2$ ab. Kugeloberfläche ist $4\pi r^2$. Also ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt außer im Ursprung.

Im 2D Fall mit dem r, Θ Koordinatensystem ist die tangentiale Komponente der Geschwindigkeit $v_\Theta = 0$, und v_r ist nur eine Funktion von r . Die radiale Geschwindigkeit muss die Kontinuitätsgleichung erfüllen:

$$2\pi r v_r = \text{const.} = \sigma \quad (\text{für alle } r)$$

Die Quellergiebigkeit $\sigma \left[\frac{m^2}{s} \right]$ ist jetzt der Volumenstrom/Breite, der durch die Kreise um die 2D Quelle fließt. Daraus folgt

$$v_r = \frac{\partial \varphi_Q}{\partial r} = \frac{\sigma}{2\pi r} ; \quad v_\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_Q}{\partial \Theta} = 0$$

und das Störpotential kann durch Integration ermittelt werden:

$$\varphi_Q = \frac{\sigma}{2\pi} \ln r .$$

Für eine 2D-Quelle im Punkt (x', z') lauten Störpotential und Geschwindigkeiten in Aufpunkt (x, z)

$$\varphi_Q = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2} ,$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{x - x'}{(x - x')^2 + (z - z')^2} ,$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{z - z'}{(x - x')^2 + (z - z')^2} ,$$

vgl. auch Vorlesung Strömungsmechanik II.

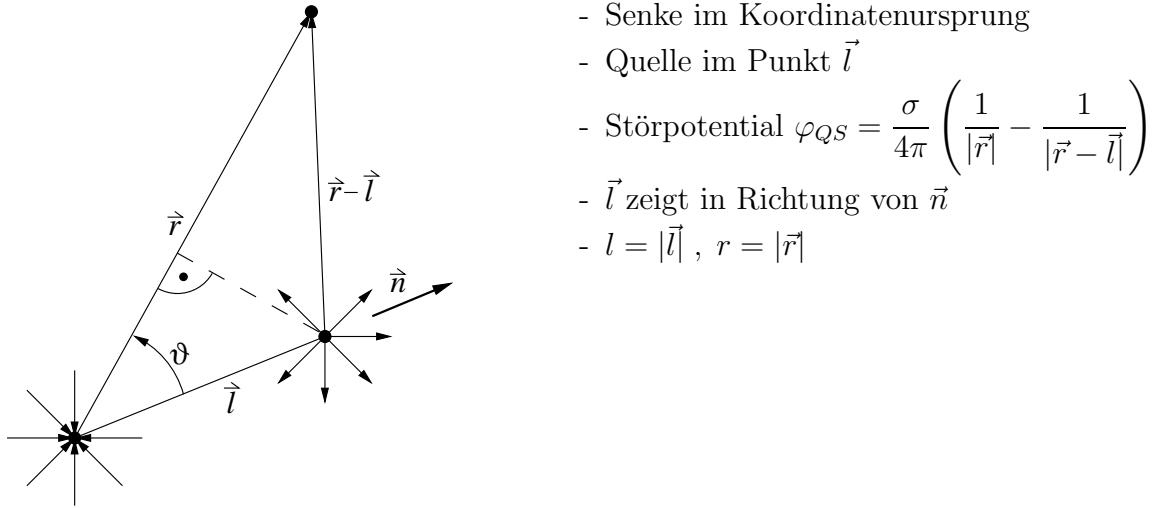
2.1.3.2 Dipolsingularität μ

Das Störpotential eines punktförmigen Dipols ist nach der allgemeinen Lösung

$$\varphi_D = \frac{\mu}{4\pi} \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) .$$

Der Vergleich mit der Quelle $\varphi_Q = -\frac{\sigma}{4\pi r}$ zeigt, dass $\varphi_D = -\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_Q)$ für Singularitätenstärken $\sigma = \frac{\mu}{m}$ ist, da die Einheit der Dipolstärke $\left[\frac{m^4}{s} \right]$ beträgt.

Zur Veranschaulichung des Charakters der Dipolströmung wird eine Anordnung von Senke und Quelle betrachtet:



Für $l \rightarrow 0$ nimmt Störpotential ab. Wir wählen σ so, dass $\sigma l = const. = \mu$, d. h. $\sigma \rightarrow \infty$ für $l \rightarrow 0$. Also

$$\varphi_{QS} = \lim_{l \rightarrow 0, \sigma l \rightarrow \mu} \frac{\sigma}{4\pi} \left(\frac{|\vec{r} - \vec{l}| - |\vec{r}|}{|\vec{r}| |\vec{r} - \vec{l}|} \right) .$$

Für $l \rightarrow 0$ gilt:

$$|\vec{r}| |\vec{r} - \vec{l}| \rightarrow r^2 \quad \left(|\vec{r} - \vec{l}| - |\vec{r}| \right) \rightarrow -l \cos \vartheta$$

$$\varphi_{QS} = -\frac{\mu}{4\pi l} \frac{l \cos \vartheta}{r^2} = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{\cos \vartheta}{r^2}$$

ϑ ist der Winkel zwischen Dipolachse und Vektor \vec{r} .

Wir nehmen nun an, dass die Dipolachse in Richtung des Normalvektors \vec{n} zeige,

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}|} :$$

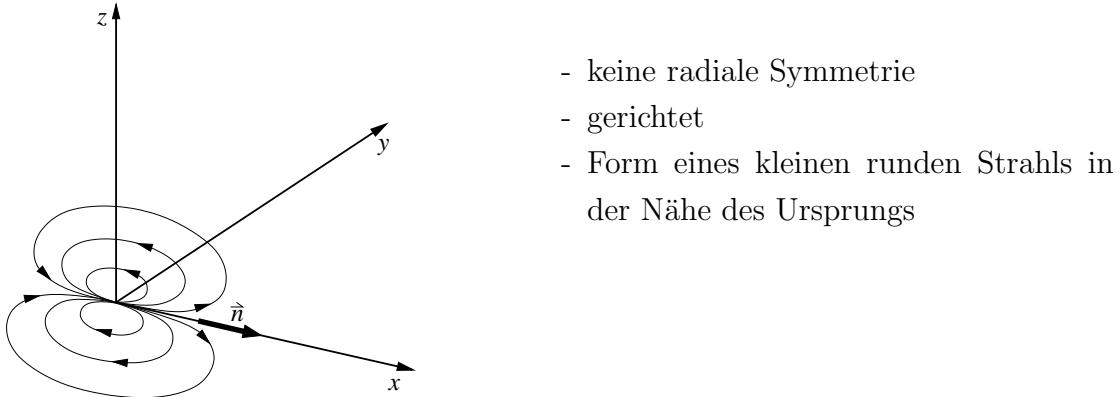
$$\varphi_{QS} = -\frac{\mu \vec{n} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Mit $\vec{r} = \vec{e}_r r$, $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \vec{e}_r \left(-\frac{1}{r^2} \right)$ ergibt sich

$$\varphi_{QS} = \frac{\mu}{4\pi} \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \equiv \varphi_D .$$

Das Dipolelement kann also aus einem Quell-Senkenpaar mit dem Abstand $l \rightarrow 0$ entwickelt werden, dessen Achse in Normalenrichtung \vec{n} zeigt.

Die qualitative Auswertung des Störpotentials in einem Koordinatensystem, dessen x -Achse mit \vec{n} zusammenfällt, ergibt ein Stromlinienbild, das im Raum die Form eines Donut mit der Lochgröße $\rightarrow 0$ annimmt.



Der 2D Dipol kann durch Zusammenfügen von 2D Quelle und Senke mit der Dipolachse in Richtung von \vec{n} erhalten werden. Wie im Fall der punktförmigen Singularitäten gilt für $\sigma = \mu$:

$$\varphi_D = -\frac{\partial}{\partial n} \varphi_Q , \quad \varphi_Q = \frac{\sigma}{2\pi} \ln r$$

also

$$\varphi_D = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) = -\frac{\mu}{2\pi} \vec{n} \cdot \nabla (\ln r) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^2}$$

Die Einheit der Stärke eines 2D Dipols ist $\left[\frac{m^3}{s} \right]$.

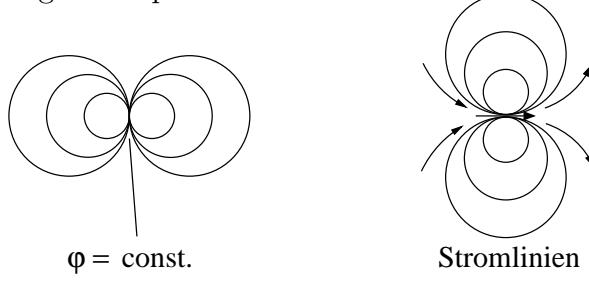
Das Störpotential im Aufpunkt (x, z) für einen 2D Dipol im Punkt (x', z') mit der Dipolachse in x -Richtung lautet

$$\varphi(x, z) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x - x'}{(x - x')^2 + (z - z')^2} ,$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{(x - x')^2 - (z - z')^2}{[(x - x')^2 + (z - z')^2]^2} ,$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{2(x - x')(z - z')}{[(x - x')^2 + (z - z')^2]^2} .$$

Das Stromlinienbild des ebenen Dipols zeigt in der Umgebung des Ursprungs einen kleinen, ebenen Strahl in Richtung der Dipolachse \vec{n} .

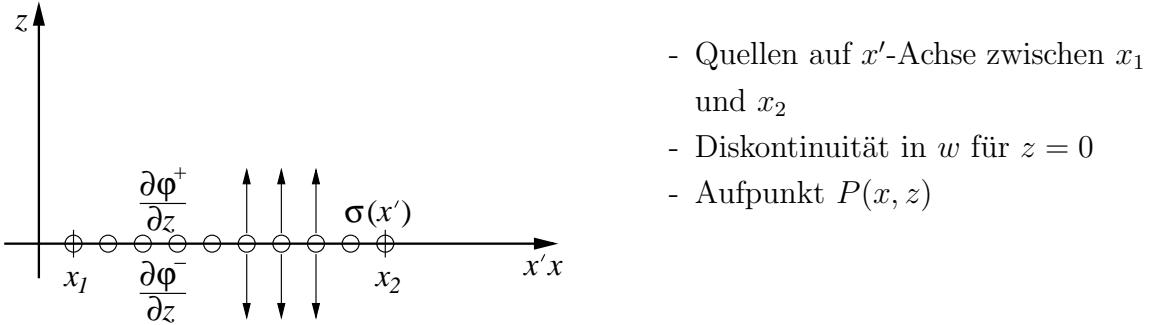


2.1.4 Deutung von Singularitätenverteilungen auf Oberflächen

Das grundlegende Vorgehen bei analytischen und numerischen Verfahren der Aerodynamik besteht darin, Singularitätenverteilungen auf Oberflächen zu verteilen, um dort die kinematische Strömungsbedingung zu erfüllen. Für eine Auswahl der geeigneten Belegungen ist es notwendig, sich über die zu erwartenden Strömungsverläufe im Klaren zu sein.

2.1.4.1 2D Quellverteilung

Betrachtung eines Sonderfalls:



Die 2D Quellverteilung wird durch kontinuierliche Belegung mit 2D Punktquellen erzeugt. Nach Abschnitt 2.1.3.1 ergibt sich

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x') \ln \sqrt{(x - x')^2 + z^2} dx'$$

Die Quellenergiebigkeit $\sigma \left[\frac{m}{s} \right]$ ist jetzt ein Volumenstrom/Fläche.

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x') \frac{x - x'}{(x - x')^2 + z^2} dx'$$

$$w(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x') \frac{z}{(x - x')^2 + z^2} dx'$$

Eigenschaften von w :

- Für $z \rightarrow 0$ ist Integrand in Glg. = 0 außer für $x' = x$
- Integral für $z \rightarrow 0$ hängt nur von $\sigma(x') = \sigma(x)$ ab
- Integrationsgrenzen auf $\pm\infty$ erweitern

Grenzbetrachtung für $z \rightarrow 0$ von oben

$$w(x, 0^+) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{(x - x')^2 + z^2} dx'$$

neue Integrationsvariablen:

$$\lambda = \frac{x - x'}{z} \quad d\lambda = -\frac{dx'}{z}$$

$$\begin{aligned} w(x, 0^+) &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-d\lambda}{1 + \lambda^2} \\ &= \frac{\sigma(x)}{2\pi} \arctan \lambda \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\sigma(x)}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\sigma(x)}{2} \end{aligned}$$

Entsprechend wird

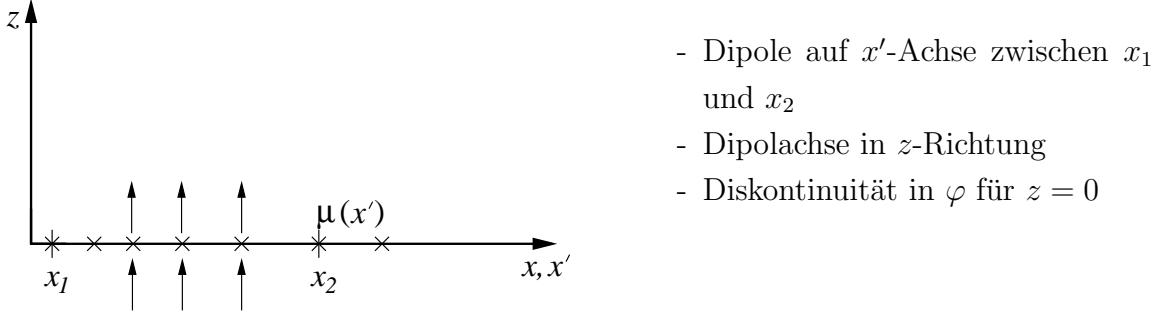
$w(x, 0^\pm) = \pm \frac{\sigma(x)}{2}$

Für beliebige Quellverteilungen $\sigma(x)$ springt die Normalgeschwindigkeit an der Stelle $(x, 0)$ von $-\frac{\sigma}{2}$ für $z = 0^-$ auf $\frac{\sigma}{2}$ für $z = 0^+$. Die resultierende Strömung ist symmetrisch zur x -Achse.

→ geeignet zur Berechnung von Verdrängungsproblemen, vgl. Vorlesung Strömungsmechanik II.

2.1.4.2 2D Dipolverteilung

Betrachtung einer Dipolverteilung entlang der x -Achse



Die 2D Dipolverteilung wird durch kontinuierliche Belegung mit 2D Punkt-Dipolen erzeugt. Nach Abschnitt 2.1.3.2 ergibt sich

$$\varphi(x, z) = \frac{-1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \mu(x') \frac{z}{(x - x')^2 + z^2} dx'$$

Die Dipolstärke hat jetzt die Einheit $\left[\frac{m^2}{s} \right]$.

$$u(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \mu(x') \frac{(x - x')z}{[(x - x')^2 + z^2]^2} dx'$$

$$w(x, z) = \frac{-1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \mu(x') \frac{(x - x')^2 - z^2}{[(x - x')^2 + z^2]^2} dx'$$

Eigenschaften:

- φ der Dipolverteilung hat gleiche Form wie w der Quellverteilung
- Für $z \rightarrow 0^\pm$ entsteht daher ein Sprung im Störpotential

- Analogie mit Quellverteilung:
$$\boxed{\varphi(x, 0^\pm) = \mp \frac{\mu(x)}{2}}$$

- Diskontinuität in der tangentialen Geschwindigkeit hängt von der Änderung des Geschwindigkeitspotentials in x -Richtung ab:

$$u(x, 0^\pm) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, 0^\pm) = \mp \frac{1}{2} \frac{d\mu}{dx}$$

Zirkulation der Dipolverteilung von x_1 bis x , $\mu(x \leq x_1) = 0$: Dafür Auswertung des Linienintegrals auf der Oberseite der Achse, $z = 0^+$, von x_1 bis x und dann bei $z = 0^-$ zurück:

$$\begin{aligned}\Gamma_{(x)} &= \int_{x_1}^x u(x', 0^+) dx' + \int_x^{x_1} u(x', 0^-) dx' \\ &= -\frac{1}{2} \int_{x_1}^x \frac{d\mu}{dx'} dx' + \frac{1}{2} \int_x^{x_1} \frac{d\mu}{dx'} dx' \\ &= -\mu(x)\end{aligned}$$

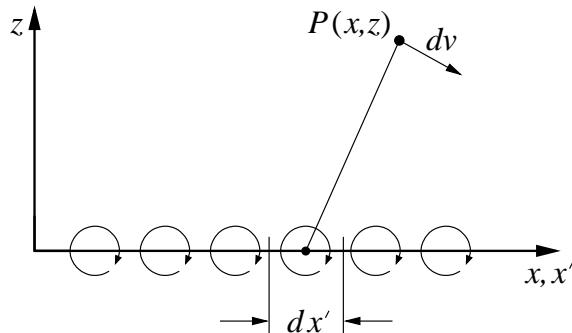
Die Zirkulation einer Dipolverteilung ergibt sich als Differenz zwischen Anfangswert und Endwert der Dipolstärke an den Rändern des Integrationsgebietes.

Eine Dipolbelegung erzeugt eine unsymmetrische, gerichtete Strömung, die je nach Verteilung auch Zirkulation enthalten kann

→ geeignet zur Berechnung von Verdrängungs- und Auftriebsproblemen.

2.1.4.3 2D Wirbelverteilung

Betrachtung einer Wirbelverteilung entlang der x -Achse



Die Verteilung k kann als Wirbelstärke/Länge $\left[\frac{m}{s}\right]$ aufgefasst werden. Der Geschwindigkeitsvektor kann in einem beliebigen Punkt mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes berechnet werden, z.B.

$$dv = \frac{kdx'}{2\pi r}$$

(Formeln siehe Strömungsmechanik II). Die gesamte Zirkulation der Wirbelfläche ist offensichtlich

$$d\Gamma = k(x')dx' \quad , \quad \Gamma = \int_{x_1}^{x_2} k(x')dx' \quad .$$

Die Zirkulation folgt auch aus der Auswertung des Linienintegrals, das den Bereich von dx' gerade umschließt.

$$d\Gamma = (u(x', 0^+) - u(x', 0^-))dx'$$

Also ergibt sich über die Wirbelverteilung ein Spung in der tangentialen Geschwindigkeit

$$u(x, 0^\pm) = \pm \frac{k(x)}{2} .$$

Der Sprung in der tangentialen Geschwindigkeit entspricht der lokalen Wirbelstärke k . Vergleicht man dieses Ergebnis für die Wirbelverteilung mit dem Ergebnis für die Dipolverteilung aus Abschnitt 2.1.4.2

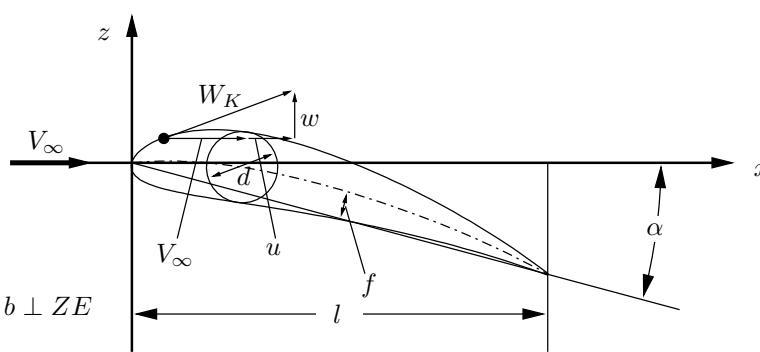
$$u(x, 0^\pm) = \mp \frac{1}{2} \frac{d\mu(x)}{dx}$$

ergibt sich, dass Wirbelverteilung und Dipolverteilung äquivalent sind, wenn gilt

$$k(x) = - \frac{d\mu(x)}{dx} .$$

2.2 Skelett-Theorie für schlanke Profile

2.2.1 Aufgabenstellung



Es soll die Strömung um ein Profil in der x-z-Ebene betrachtet werden. Dabei sei vorausgesetzt, dass

relative Dicke d/l

relative Wölbung f/l

Anstellwinkel α

klein sind.

Die zu lösende Potentialgleichung lautet

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 .$$

Die zugehörigen Randbedingungen sind

Weit weg : $x \rightarrow \infty$: $\varphi_x = \varphi_z = 0$

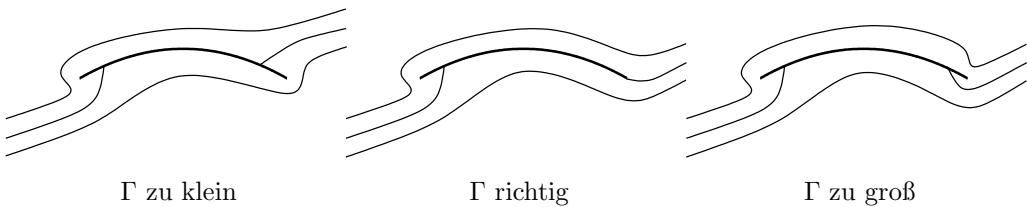
Am Körper : $z_K = -\alpha x + z^{(s)} \pm z^{(t)}$: $\frac{dz_K}{dx} = \frac{w}{V_\infty}$

Kinematische Strömungsbedingung

Setzt man z_K in die kinematische Strömungsbedingung ein, so lässt sich das Problem aufspalten (vgl. Abschnitt 1.2.3) in

$$\begin{aligned} \frac{dz^{(s)}}{dx} = \alpha + \frac{w^{(s)}}{V_\infty} &\quad \text{und} \quad \frac{dz^{(t)}}{dx} = \frac{w^{(t)}}{V_\infty} \\ \text{Auftriebsproblem} & \qquad \qquad \qquad \text{Dickenproblem} \\ \text{Angestelltes Skelett} & \qquad \qquad \qquad \text{Nichtangestellter Tropfen} \end{aligned}$$

Im Folgenden soll das Auftriebsproblem behandelt werden. In diesem Fall ist die Lösung der Potentialgleichung durch die beiden Randbedingungen noch nicht eindeutig festgelegt. Mögliche Lösungen unterscheiden sich



wie skizziert hinsichtlich der Lage der Staupunkte. Die Auswahl der richtigen Lösung erfolgt entsprechend dem Verhalten der reibungsbehafteten Strömung an der Hinterkante: Dort findet keine Umströmung statt, sondern die Strömung fließt glatt ab, und es ist $p_{un} = p_{ob}$. Dies ist die Kutta'sche Abflussbedingung, die bei den Randbedingungen des Auftriebsproblems als Nebenbedingung hinzukommt. Die in der Skizze dargestellten Lösungen unterscheiden sich bezüglich der Zirkulation $\Gamma = \oint \vec{V} d\vec{s}$. Dies bedeutet, dass durch die Kutta'sche Abflussbedingung auch die Zirkulation Γ und damit nach dem Joukowski'schen Satz

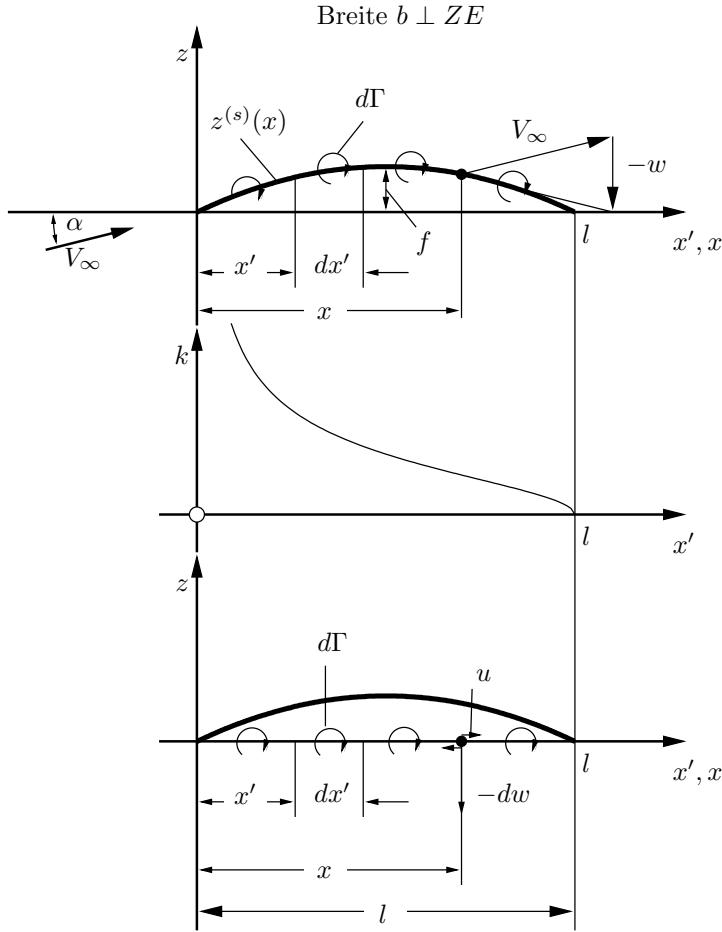
$$A = \rho b V_\infty \Gamma$$

auch der Auftrieb festgelegt wird.

2.2.2 Skelett-Theorie

Die Lösung des Auftriebsproblems soll nun mit dem Ansatz behandelt werden, Grundlösungen der Potentialgleichung (Singularitäten) so zu überlagern, dass die kinematische Strömungsbedingung als Randbedingung erfüllt wird. Dieses Vorgehen wird als Singularitätenverfahren bezeichnet.

2.2.2.1 Grundgleichung



Betrachtet sei ein Skelett $z^{(s)}(x)$ mit kleiner Wölbung f/l bei kleinem Anstellwinkel α . Dieses Skelett wird mit einer Verteilung von Potentialwirbeln belegt. Die Wirbeldichte sei

$$k(x') = \frac{d\Gamma}{dx'}$$

$$\left[\frac{\text{Wirbelstärke}}{\text{Länge}} ; \frac{m^2}{s} \frac{1}{m} = \frac{m}{s} \right].$$

Damit ist die örtliche Zirkulation

$$d\Gamma = k(x')dx'$$

und die Gesamtzirkulation

$$\Gamma = \int_0^l k(x')dx',$$

und für den Auftrieb gilt

$$A = \rho b V_\infty \Gamma .$$

(Joukowsky'scher Satz)

Der an einem Element dx' wirkende Auftrieb lässt sich darstellen als

$$dA = \rho b V_\infty k(x') dx'$$

und aus der Druckdifferenz folgt:

$$dA = (p_{un} - p_{ob})b dx' .$$

Aus dem Vergleich ergibt sich

$$p_{un} - p_{ob} = \rho V_\infty k(x') .$$

Die örtliche Wirbeldichte ist der Druckdifferenz proportional. Die Kutta'sche Abflussbedingung $p_{un} = p_{ob}$ ist an der Hinterkante erfüllt, falls

$$k(x' = l) = 0 .$$

Eine realistische Wirbeldichtenverteilung $k(x')$ mit diesem Merkmal ist in der Figur skizziert. Für die Berechnung der Wirbeldichtenverteilung $k(x')$ kann auf Grund

der Voraussetzung kleiner relativer Wölbung die Wirbelverteilung wie skizziert näherungsweise auf der Sehne angeordnet werden, und die zur Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung

$$\frac{dz^{(s)}}{dx} = \alpha + \frac{w^{(s)}}{V_\infty}$$

erforderliche Störgeschwindigkeit $w^{(s)}$ wird ebenfalls näherungsweise für einen Aufpunkt auf der Sehne ermittelt. Die Wirbelverteilung auf der Sehne des Skeletts induziert in ihrer Umgebung Störgeschwindigkeiten entsprechend dem Biot-Savart'schen Gesetz. Für einen Aufpunkt auf der Belegungslinie (x -Achse) ergibt sich dabei (vgl. Abschnitt 2.1.4.3)

$$u(x, z = \pm 0) = \pm \frac{k(x)}{2} .$$

Damit ist

$$u_{ob} - u_{un} = V_{ob} - V_{un} = k(x) .$$

Beim Durchtritt durch die Belegungslinie einer Wirbelverteilung springt die induzierte Längskomponente u um die Wirbeldichte k . Die Gesamtgeschwindigkeiten sind im Rahmen der Theorie kleiner Störungen

$$\begin{aligned} V_{ob} &= V_\infty + \frac{k}{2} \\ V_{un} &= V_\infty - \frac{k}{2} . \end{aligned}$$

Für den Druckbeiwert folgt daraus

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} = \mp \frac{k}{V_\infty} - \left(\frac{k}{2V_\infty} \right)^2 , \quad \begin{array}{l} - \text{oben,} \\ + \text{unten} \end{array}$$

und für kleine Störungen bleibt

$$c_p = - \frac{2u}{V_\infty} = \mp \frac{k}{V_\infty} .$$

Für die Störgeschwindigkeit w folgt aus dem Bio-Savart'schen Gesetz entsprechend der Figur

$$-dw = \frac{d\Gamma}{2\pi(x - x')} = \frac{k(x')dx'}{2\pi(x - x')}$$

$$w = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{k(x')dx'}{x - x'}$$

Darin bedeuten

- x' Induzierende Stelle. Dies ist der Ort, an dem der Wirbel sitzt. Von dieser Stelle geht die Induktion aus.
- x Aufpunkt. Dies ist der Ort, an dem die induzierte Geschwindigkeit berechnet wird und in dem die kinematische Strömungsbedingung erfüllt wird.

Mit dem Ergebnis für w lautet die kinematische Strömungsbedingung

$$\boxed{\alpha - \frac{dz^{(s)}}{dx} = \frac{1}{2\pi V_\infty} \oint_0^l \frac{k(x') dx'}{x - x'}} .$$

Dies ist die Grundgleichung der Skelett-Theorie. Sie stellt einen Zusammenhang zwischen Skelett und Anströmung einerseits und der Wirbelverteilung andererseits dar. Die beiden Hauptaufgaben der Profiltheorie führen auf folgende Probleme:

Entwurf (1. Hauptaufgabe): Nach der Integration ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Skelettform $z^{(s)}(x)$ zu lösen.

Nachrechnen (2. Hauptaufgabe): Es ist eine Integralgleichung (1. Art) für die Wirbeldichtenverteilung $k(x')$ zu lösen.

Für beide Aufgaben kommt erschwerend hinzu, dass der Integrand für $x' = x$ singulär wird, so dass der Cauchy'sche Hauptwert des Integrals

$$\oint_0^l \frac{k(x') dx'}{x - x'} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{x-\varepsilon} \frac{k(x') dx'}{x - x'} + \int_{x+\varepsilon}^l \frac{k(x') dx'}{x - x'} \right]$$

gebildet werden muss.

2.2.2.2 Lösungsverfahren

Das auftretende Integral mit singulärem Kern kann folgendermaßen weiterbehandelt werden:

Koordinatentransformation. Man geht von den Variablen x, x' zu trigonometrischen Variablen ϑ, ϑ' über gemäß

$$\begin{aligned} x &= \frac{l}{2}(1 + \cos \vartheta) \\ x' &= \frac{l}{2}(1 + \cos \vartheta') \quad \text{und} \quad dx' = -\frac{l}{2} \sin \vartheta' d\vartheta' . \end{aligned}$$

Dies bedeutet folgende Zuordnungen

$$\begin{aligned} x' &= l : \vartheta' = 0 \quad \text{Hinterkante} \\ x' &= \frac{l}{2} : \vartheta' = \frac{\pi}{2} \quad \text{Profilmitte} \\ x' &= 0 : \vartheta' = \pi \quad \text{Vorderkante} \end{aligned} .$$

Damit geht die Grundgleichung der Skelett-Theorie über in

$$\alpha - \frac{dz^{(s)}}{dx} = -\frac{w(\vartheta)}{V_\infty} = \frac{1}{2\pi V_\infty} \oint_0^\pi \frac{k(\vartheta') \sin \vartheta'}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} d\vartheta' .$$

Ansatz für die Wirbeldichtenverteilung $k(\vartheta')$ nach Ackermann und Birnbaum:

$$k(\vartheta') = 2V_\infty \left(A_0 \tan \frac{\vartheta'}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin n\vartheta' \right) .$$

Aus diesem Ansatz ergibt sich für die Hinterkante

$$\vartheta' = 0 : k(0) = 0 .$$

Die Kutta'sche Abflussbedingung ist somit automatisch erfüllt. Mit

$$\tan \frac{\vartheta'}{2} = \frac{1 - \cos \vartheta'}{\sin \vartheta'}$$

folgt für die induzierte Geschwindigkeit $w(\vartheta)$

$$-w(\vartheta) = V_\infty \left[A_0 \frac{1}{\pi} \oint_0^\pi \frac{1 - \cos \vartheta'}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} d\vartheta' + \sum_{n=1}^N A_n \frac{1}{\pi} \oint_0^\pi \frac{\sin n\vartheta' \sin \vartheta'}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} d\vartheta' \right] .$$

Die auftretenden Integrale lassen sich alle auf die Lösung

$$\frac{1}{\pi} \oint_0^\pi \frac{\cos n\vartheta'}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} d\vartheta' = -\frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} ; \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

zurückführen. Dies ist das bekannte Glauert'sche Integral. Für das erste Integral folgt unmittelbar

$$\frac{1}{\pi} \oint_0^\pi \frac{1 - \cos \vartheta'}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} d\vartheta' = 1$$

und für das zweite Integral folgt mit

$$-\sin n\vartheta' \sin \vartheta' = \frac{1}{2} \cos(n+1)\vartheta' - \frac{1}{2} \cos(n-1)\vartheta'$$

$$\cos n\vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{2} \sin(n+1)\vartheta - \frac{1}{2} \sin(n-1)\vartheta$$

$$\frac{1}{\pi} \oint_0^\pi \frac{\sin n\vartheta' \sin \vartheta'}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} d\vartheta' = \frac{1}{2} \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin \vartheta} - \frac{1}{2} \frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin \vartheta} = \cos n\vartheta .$$

Damit ergibt sich aus der Grundgleichung der Skelett-Theorie

$$\alpha - \frac{dz^{(s)}}{dx} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos n\vartheta .$$

Damit sind die Integrale mit singulärem Kern gelöst, und es bleibt eine algebraische Gleichung übrig. Die beiden Hauptaufgaben der Profiltheorie stellen sich jetzt wie folgt dar:

Entwurf : $A_0, A_1 \dots A_N$ gegeben. Es ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für $z^{(s)}(\vartheta)$ zu lösen.

Nachrechnen : Geometrie $z^{(s)}(\vartheta)$ und Anströmung α sind gegeben. Die Koeffizienten des Ansatzes $A_0, A_1 \dots A_N$ sind gesucht. Für diese Aufgabe gibt es folgende Lösungsmöglichkeiten:

Gleichungssystem. Die algebraische Gleichung wird an $N+1$ Stellen ϑ erfüllt. Damit ergibt sich ein lineares Gleichungssystem von $N+1$ Gleichungen für die $N+1$ Unbekannten $A_0, A_1 \dots A_N$.

Fourieranalyse. Mit Hilfe der Euler-Fourier'schen Formeln lassen sich die Fourierkoeffizienten durch die gegebene Kontur $z^{(s)}$ ausdrücken.

Man erhält dabei unmittelbar

$$\begin{aligned} A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz^{(s)}}{dx}(\vartheta) d\vartheta \\ A_n &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz^{(s)}}{dx}(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Für diese beiden Beziehungen existieren auch für die Auswertung bequeme Summenformeln.

2.2.2.3 Aerodynamische Beiwerte

Für den Druckbeiwert c_p folgt aus dem Ackermann/Birnbaum'schen Ansatz

$$c_p(\vartheta) = \mp \frac{k(\vartheta)}{V_\infty} = \mp 2 \left(A_0 \tan \frac{\vartheta}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin n\vartheta \right) .$$

Für den Auftriebsbeiwert ergibt sich

$$c_a = \frac{A}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 b l} = \frac{\rho b V_\infty \int_0^l k(x) dx}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 b l} = 2 \int_0^1 \frac{k(x)}{V_\infty} d\left(\frac{x}{l}\right) ,$$

und unter Verwendung der trigonometrischen Variablen lässt sich schreiben

$$c_a = \int_0^\pi \frac{k(\vartheta)}{V_\infty} \sin \vartheta d\vartheta .$$

Setzt man hier den Ansatz ein und verwendet wieder $\tan \frac{\vartheta}{2} = (1 - \cos \vartheta) / \sin \vartheta$, so folgt

$$c_a = 2 \left[A_0 \int_0^\pi (1 - \cos \vartheta) d\vartheta + \sum_{n=1}^N A_n \int_0^\pi \sin n\vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right] .$$

Für das zweite Integral gilt

$$\int_0^\pi \sin n\vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n \neq 1 \end{cases} .$$

Damit ist

$$c_a = 2 \pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) .$$

Nur die beiden ersten Glieder des Ackermann/Birnbaum'schen Ansatzes tragen zum Auftriebsbeiwert bei. Setzt man A_0 und A_1 ein, so folgt

$$c_a = 2 \pi \left(\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz^{(s)}}{dx} (1 + \cos \vartheta) d\vartheta \right) .$$

Andererseits ist der Auftriebsbeiwert linear vom Anstellwinkel α abhängig (siehe Vorlesung Strömungsmechanik II) entsprechend

$$c_a = \frac{dc_a}{d\alpha} (\alpha - \alpha_0) .$$

Der Vergleich liefert für den Auftriebsanstieg

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = 2 \pi .$$

Dieses Ergebnis gilt für alle Skeletlinien, ist also unabhängig von der Skelettform.

Weiterhin ist der Nullauftriebswinkel

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz^{(s)}}{dx} (1 + \cos \vartheta) d\vartheta .$$

Dieses Ergebnis ist von der Skelettform abhängig. Eine analoge Integration kann auch für den Nickmomentenbeiwert durchgeführt werden. Dabei ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$c_{m_{Nase}} = \frac{M_{Nase}}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 b l^2} = - \frac{\rho b V_\infty \int_0^l k(x) x dx}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 b l^2} = -2 \int_0^1 \frac{k}{V_\infty} \frac{x}{l} d\left(\frac{x}{l}\right) .$$

Geht man wieder zu den trigonometrischen Variablen über und setzt man den Ackermann/Birnbaum'schen Ansatz ein, so folgt

$$c_{m_{Nase}} = -\frac{\pi}{4} (2A_0 + 2A_1 + A_2) = -\frac{c_a}{4} - \frac{\pi}{4} (A_1 + A_2) .$$

Nur die ersten drei Glieder des Ackermann/Birnbaum'schen Ansatzes tragen zum Nickmoment bei. Vergleicht man wieder mit der bekannten linearen Abhängigkeit (siehe Vorlesung Strömungsmechanik II)

$$c_{m_{Nase}} = \frac{dc_{m_{Nase}}}{dc_a} c_a + c_{m0} \quad ,$$

so folgt

$$-\frac{dc_{m_{Nase}}}{dc_a} = \frac{1}{4} = \frac{x_N}{l} \quad .$$

Dies ist der auftriebsunabhängige Teil der Druckpunktlage

$$\frac{x_D}{l} = -\frac{dc_{m_{Nase}}}{dc_a} - \frac{c_{m0}}{c_a} = \frac{x_N}{l} - \frac{c_{m0}}{c_a} \quad .$$

Für große Anstellwinkel und damit große Auftriebsbeiwerte wandert der Druckpunkt gegen diesen Punkt, $x_D \rightarrow x_N$. Er heißt Neutralpunkt. Dieser Neutralpunkt ist für alle Skelettformen gleich, und er liegt im $l/4$ -Punkt. Der Vergleich liefert weiterhin für den Nullmomentenbeiwert

$$c_{m0} = -\frac{\pi}{4}(A_1 + A_2) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{dz^{(s)}}{dx} (\cos \vartheta + \cos 2\vartheta) d\vartheta \quad .$$

Dieser Beiwert ist von der Skelettform abhängig. Er bestimmt die Druckpunktwanderung.

2.2.2.4 Normalverteilungen

Die ersten Glieder des Ackermann/Birnbaum'schen Ansatzes sind für die Umströmung von Skelettprofilen von fundamentaler Bedeutung. Sie sollen im Folgenden kurz dargestellt werden.

1. Birnbaum'sche Normalverteilung

Das erste Glied lautet für sich genommen

$$\begin{aligned} k_1(\vartheta) &= 2 V_\infty A_0 \tan \frac{\vartheta}{2} = 2 V_\infty A_0 \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \\ &= 2 V_\infty A_0 \sqrt{\frac{(1 - \cos \vartheta)(1 - \cos \vartheta)}{1 - \cos^2 \vartheta}} = 2 V_\infty A_0 \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta}} \quad . \end{aligned}$$

Die Rückkehr zu den ursprünglichen Koordinaten mit

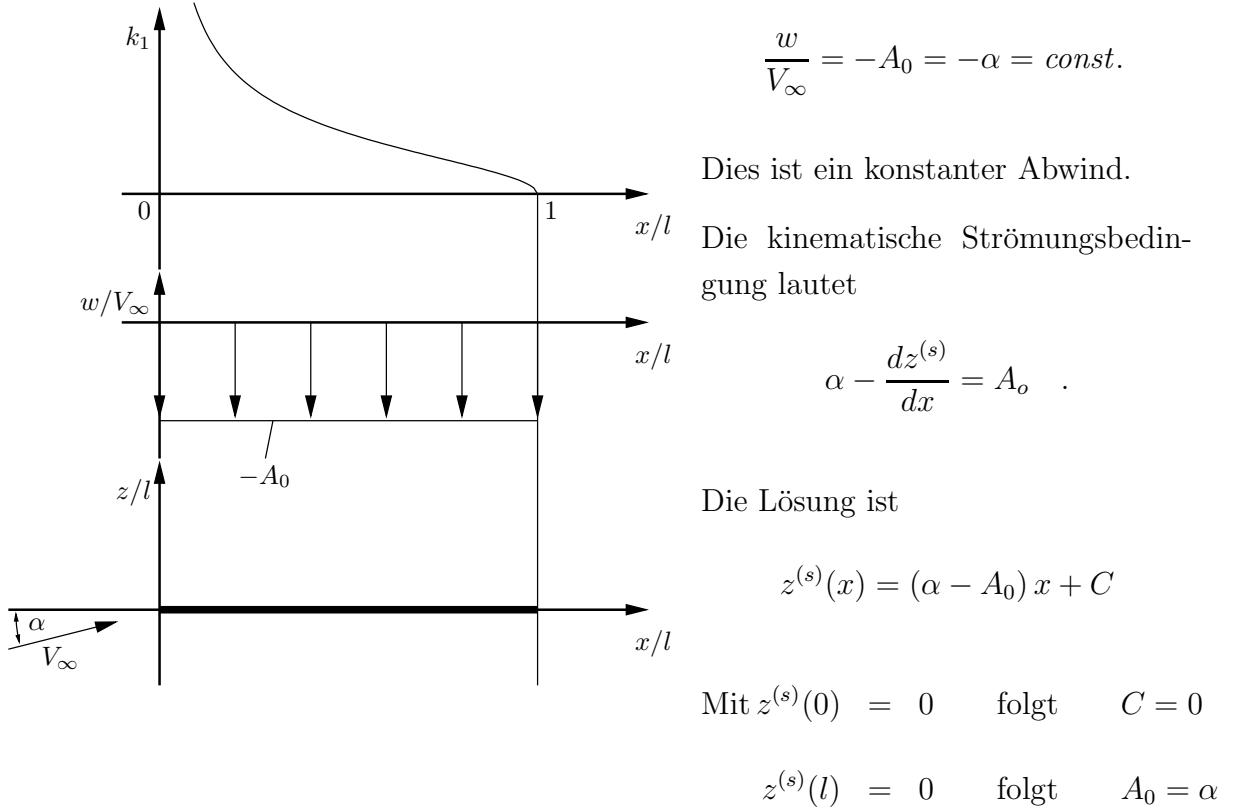
$$1 + \cos \vartheta = 2 \frac{x}{l} \quad ; \quad 1 - \cos \vartheta = 2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

liefert

$$k_1 \left(\frac{x}{l} \right) = 2V_\infty A_0 \sqrt{\frac{1-x/l}{x/l}} .$$

Dies ist die 1. Birnbaum'sche Normalverteilung.

Für die von dieser Verteilung induzierte Geschwindigkeit $w(x)$ folgt



Damit lautet das Skelett:

$$z^{(s)} = 0 .$$

Die 1. Birnbaum'sche Normalverteilung beschreibt also die Strömung um eine unter dem Anstellwinkel $\alpha = A_0$ angeströmte ebene Platte. Für deren aerodynamische Beiwerte folgt

$$c_a = 2\pi\alpha ; \quad \frac{dc_a}{d\alpha} = 2\pi$$

$$c_{m_{Nase}} = -\frac{\pi}{2}\alpha = -c_a \frac{x_D}{l} ; \quad \frac{x_D}{l} = \frac{x_N}{l} = \frac{1}{4} .$$

Der Druckpunkt (= Neutralpunkt) liegt also bei der angestellten ebenen Platte im $l/4$ -Punkt (= Schwerpunkt der 1. Birnbaum'schen Normalverteilung).

2. Birnbaum'sche Normalverteilung

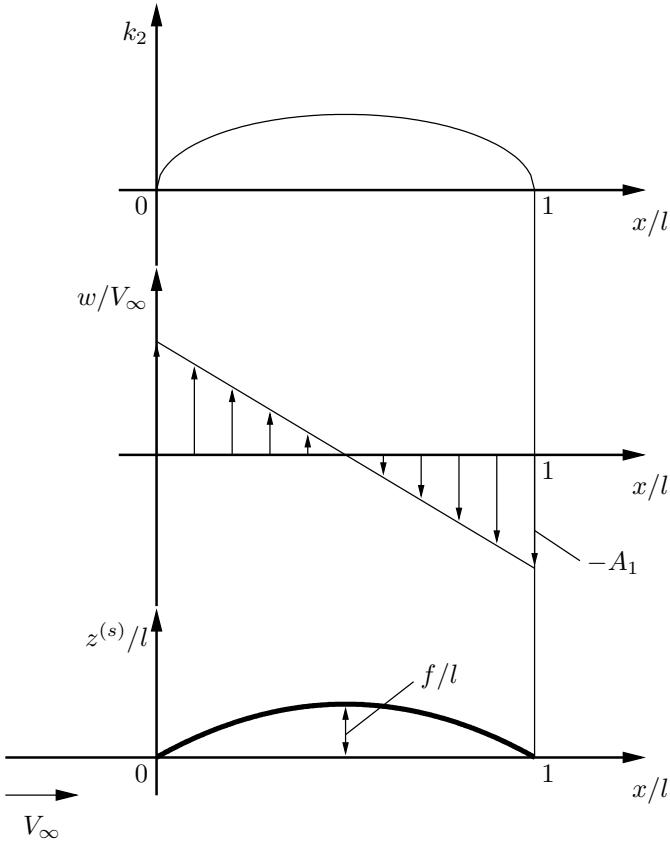
Das zweite Glied lautet für sich genommen

$$k_2(\vartheta) = 2 V_\infty A_1 \sin \vartheta = 2 V_\infty A_1 \sqrt{(1 + \cos \vartheta)(1 - \cos \vartheta)}$$

$$k_2\left(\frac{x}{l}\right) = 4 V_\infty A_1 \sqrt{\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)} .$$

Dies ist die 2. Birnbaum'sche Normalverteilung. Es handelt sich um eine elliptische Verteilung.

Der von ihr induzierte Aufwind ist



$$\frac{w(x)}{V_\infty} = -A_1 \cos \vartheta = -A_1 \left(2 \frac{x}{l} - 1\right)$$

Dies ist eine lineare Aufwindverteilung. Die kinematische Strömungsbedingung lautet

$$\alpha - \frac{d z^{(s)}}{d x} = A_1 \cos \vartheta = A_1 \left(2 \frac{x}{l} - 1\right)$$

Die Lösung ist

$$z^{(s)}(x) = \alpha x - A_1 \left(\frac{x^2}{l} - x\right) + C$$

Mit $z^{(s)}(0) = 0$ folgt $C = 0$

$z^{(s)}(l) = 0$ folgt $\alpha = 0$

Somit Skelett: $\frac{z^{(s)}}{l} = -A_1 \frac{x}{l} \left(\frac{x}{l} - 1\right) .$

Die 2. Birnbaum'sche Normalverteilung beschreibt also die Strömung um ein sehnenparallel ($\alpha = 0$) angeströmtes Parabelskelett. Seine relative Wölbung beträgt

$$\frac{f}{l} = \frac{A_1}{4} .$$

Für die aerodynamischen Beiwerte gilt

$$\begin{aligned} c_a &= 2\pi \frac{A_1}{2} = 4\pi \frac{f}{l} \\ c_{m_{Nase}} &= -\frac{\pi}{2} A_1 = -2\pi \frac{f}{l} = -c_a \frac{x_D}{l} \\ \frac{x_D}{l} &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

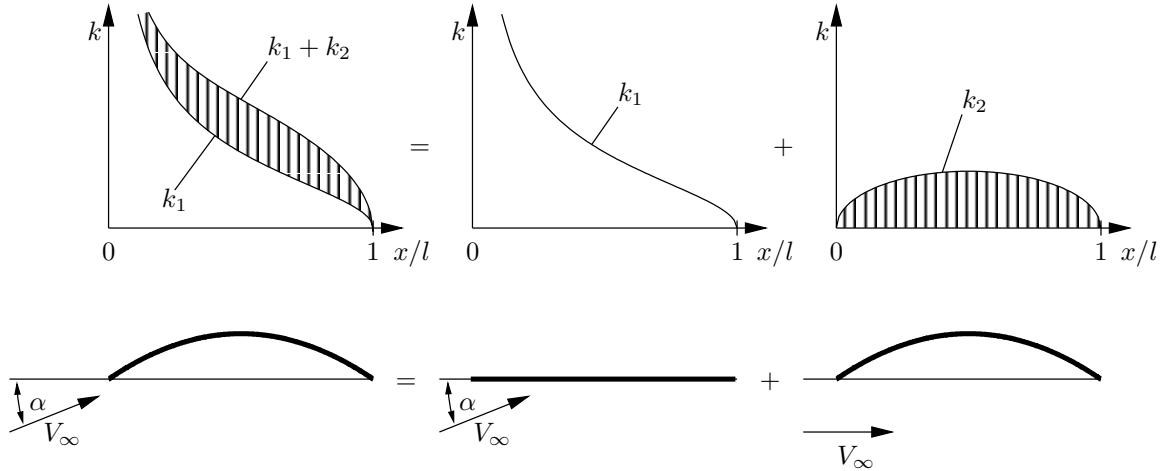
Der Druckpunkt liegt in der Mitte des Parabelskeletts (= Schwerpunkt der 2. Birnbaum'schen Normalverteilung).

1. + 2. Birnbaum'sche Normalverteilung

Die Überlagerung der beiden Wirbeldichtenverteilungen

$$k(\vartheta) = k_1(\vartheta) + k_2(\vartheta) = 2V_\infty(\alpha \tan \frac{\vartheta}{2} + 4 \frac{f}{l} \sin \vartheta)$$

liefert die Addition der beiden bisher untersuchten Skelettumströmungen:



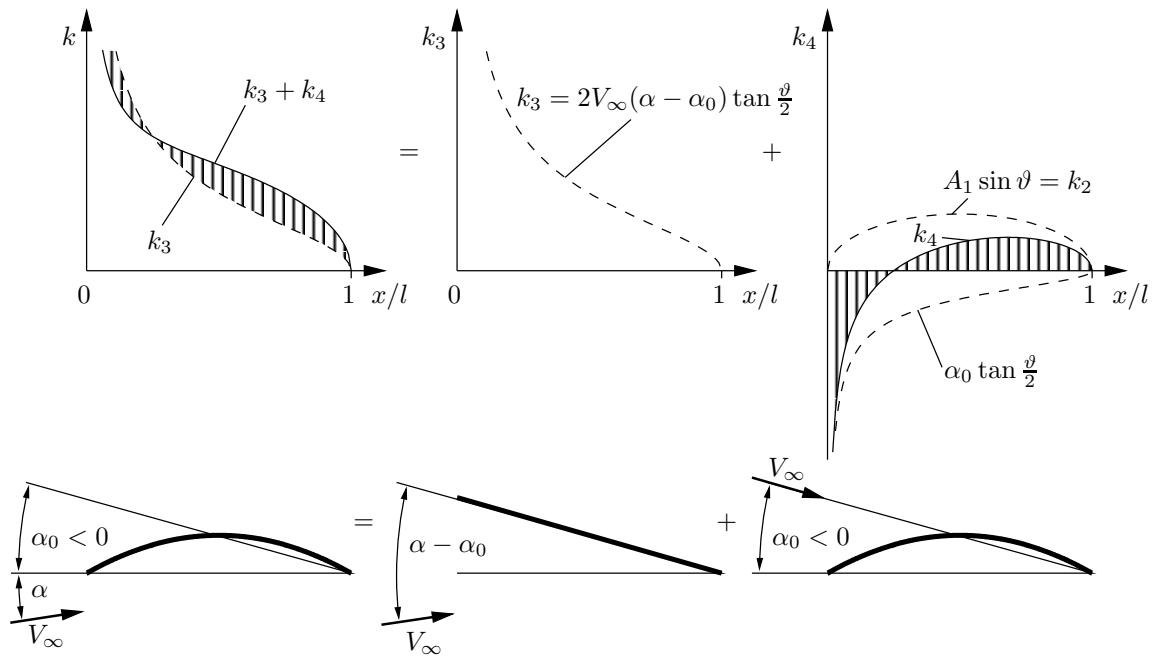
Die Ergebnisse für die induzierte Geschwindigkeit $w(x)$ sowie für die Skelettlinien addieren sich ebenfalls. Damit beschreiben die 1. + 2. Birnbaum'sche Verteilung die Strömung um ein angestelltes Parabelskelett.

Die Überlagerung der 1. + 2. Birnbaumverteilung kann auch in der Form

$$k(\vartheta) = k_3(\vartheta) + k_4(\vartheta) = 2V_\infty \left[(\alpha - \alpha_0) \tan \frac{\vartheta}{2} + \alpha_0 \tan \frac{\vartheta}{2} + A_1 \sin \vartheta \right]$$

vorgenommen werden.

Dies liefert ($\alpha_0 < 0$)



Dabei ist

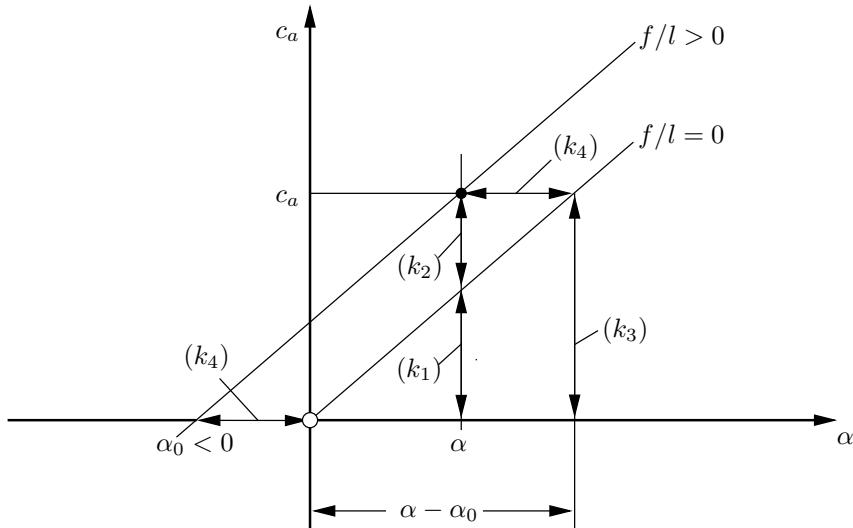
$$k_3(\vartheta) = 2 V_\infty (\alpha - \alpha_0) \tan \frac{\vartheta}{2}$$

eine 1. Birnbaumverteilung mit zugehörigem Anstellwinkel $\alpha - \alpha_0$ und

$$k_4 = 2 V_\infty \left(\alpha_0 \tan \frac{\vartheta}{2} + 4 \frac{f}{l} \sin \vartheta \right)$$

die sogenannte Nullverteilung. Sie besteht aus einer negativen 1. Birnbaumverteilung (wegen $\alpha_0 < 0$), die den Auftriebsbeiwert $2 \pi \alpha_0 = 2 \pi (-2 \frac{f}{l}) = -4 \pi f/l$ liefert und aus der 2. Birnbaumverteilung, die einen Auftriebsbeiwert $+4 \pi f/l$ zur Folge hat. Mithin trägt die Verteilung $k_4(\vartheta)$ nicht zum Auftrieb bei. Der Auftrieb röhrt allein von der Verteilung $k_3(\vartheta)$. Sie stellt eine ebene Platte mit dem Anstellwinkel $\alpha - \alpha_0$ dar.

Für den Auftriebsverlauf lassen sich diese Ergebnisse wie folgt darstellen:



Die Wirbeldichtenverteilung für ein Parabelskelett ($f/l > 0$) beim Anstellwinkel α lässt sich also zusammensetzen

- entweder aus der Wirbeldichtenverteilung $k_1(\vartheta)$ einer ebenen Platte beim Anstellwinkel α und der Wirbeldichtenverteilung $k_2(\vartheta)$ des nicht angestellten Parabelskeletts
- oder aus der Wirbeldichtenverteilung $k_3(\vartheta)$ einer ebenen Platte mit dem Anstellwinkel $\alpha - \alpha_0$ und der Nullverteilung $k_4(\vartheta)$, die ihrerseits aus der Wirbeldichtenverteilung einer negativ angestellten ebenen Platte und der Wirbeldichtenverteilung $k_2(\vartheta)$ des nichtangestellten Parabelskeletts besteht.

Die letztere Art der Überlagerung ist deshalb von großer praktischer Bedeutung, weil mit ihrer Hilfe der Auftrieb eines gewölbten Skeletts auf den einer entsprechend angestellten Platte zurückgeführt werden kann. Auf diese Weise kann bei einem Tragflügel unendlicher Spannweite eine evtl. vorliegende Profilwölbung (aerodynamische Verwindung) auf eine Plattenströmung mit verändertem Anstellwinkel (geometrische Verwindung) zurückgeführt werden.

2.3 Wirbelmodell für das 3D Problem

Für die Lösung der Potentialgleichung

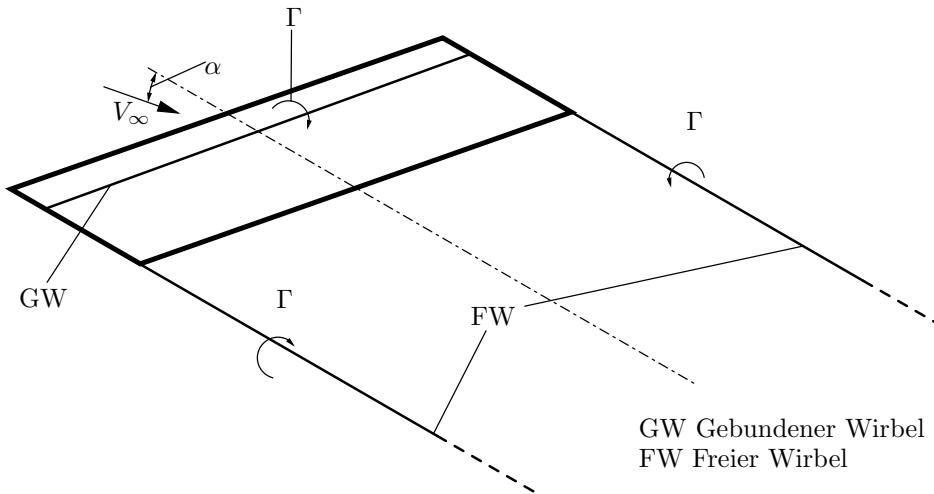
$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

mit Hilfe des Superpositionsprinzips ist außer der Translationsströmung auch der Potentialwirbel eine Grundlösung. Nach dem Helmholtz'schen Wirbelsatz (siehe Vorlesung Strömungsmechanik II) können aber Wirbelfäden im Strömungsfeld nicht enden. Sie müssen entweder in sich geschlossen sein oder ins Unendliche verlaufen. Unter Berücksichtigung dieser Fakten sind nun Potentialwirbel an einem Tragflügel endlicher Spannweite anzutragen, um damit die Potentialgleichung lösen zu können. Dies führt auf das Wirbelmodell für den Tragflügel endlicher Spannweite.

Im Folgenden soll ein ebener (unverwundener) angestellter Plattenflügel endlicher Spannweite betrachtet werden. Man kann zu einem sehr einfachen Wirbelmodell gelangen, indem man die Wirbeldichtenverteilung $k(x')$ zu einem Einzelwirbel der Stärke

$$\Gamma = \int_0^l k(x') dx'$$

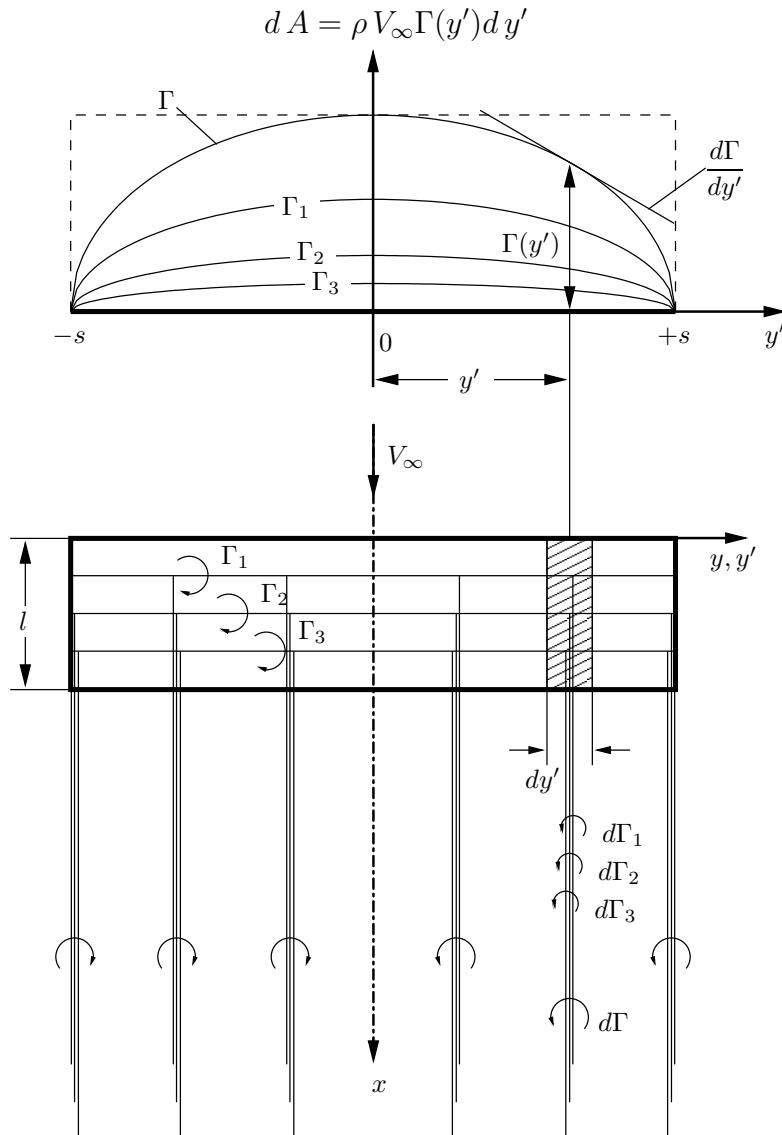
zusammenfasst und indem man diesen Wirbel in der $l/4$ -Linie (Schwerpunkt der 1. Birnbaum'schen Verteilung, Theorem von Pistoletti) anordnet. Dieser Wirbel repräsentiert den Tragflügel; er ist an den Flügel gebunden (Gebundener Wirbel). Dieser Wirbel kann am



Flügelende nicht aufhören, sondern er muss sich dort nach hinten in die freie Strömung hinein fortsetzen und bis ins Unendliche verlaufen. Dies führt zu den beiden freien, im Bild dargestellten Wirbeln. Auf diese Weise gelangt man zu dem sogenannten Hufeisenwirbelmodell für einen Tragflügel endlicher Spannweite. Dieses einfachste Wirbelmodell trägt zwar der Existenz der freien Wirbel Rechnung. Es ist jedoch als Grundlage einer Tragflügeltheorie ungeeignet, weil die Zirkulation Γ längs des Wirbelfadens ($GW + 2FW$) konstant ist, während sich die Zirkulation Γ längs der Spannweite des Flügels in Wirk-

lichkeit ändert. Aus diesem Grund ist die Modellvorstellung weiter zu verfeinern.

Infolge des Druckausgleichs zwischen Unterseite und Oberseite des Flügels fällt der örtliche Auftrieb



und damit die örtliche Zirkulation

$$\Gamma(y') = \int_0^l k(x', y') dx'$$

am Flügelende auf Null ab. Die Wirbeldichte $k(x', y')$ ist daher flächenhaft auf dem Flügel verteilt. Geht man von der Gesamtzirkulation

$$\Gamma(y') = \sum \Gamma_n(y') = \Gamma_1(y') + \Gamma_2(y') + \Gamma_3(y') + \dots$$

auf einzelne gebundene Wirbelfäden zurück, so fällt auf jedem dieser einzelnen Wirbelfäden die Zirkulation am Flügelende auf Null ab. Zur Erfüllung des Helmholtz'schen Wirbelsatzes muss dann von jedem der einzelnen gebundenen Wirbelfäden entsprechend

der örtlichen spannweitigen Zirkulationsänderung ein Wirbel der Stärke $d\Gamma_n = \frac{d\Gamma_n}{dy'} dy'$ in Anströmungsrichtung nach hinten abgehen. Von der Hinterkante eines Flächenelementes $l \cdot dy'$ geht dann die Summe aller dortigen Zirkulationsänderungen

$$d\Gamma = \sum d\Gamma_n = \sum \frac{d\Gamma_n}{dy'} dy' = \frac{d\Gamma}{dy'} dy'$$

als freier Wirbel in Anströmungsrichtung nach hinten ab. Da an jeder Stelle y' des Flügels eine Zirkulationsänderung $d\Gamma/dy'$ vorhanden ist, geht auch von jedem Punkt der Hinterkante ein freier Wirbel ab. Hinter dem Flügel ist also eine kontinuierlich mit Wirbeln belegte Wirbelschicht vorhanden, die sich stromabwärts bis ins Unendliche erstreckt.

Das hier entwickelte Wirbelmodell eines Tragflügels endlicher Spannweite lässt sich folgendermaßen einteilen:

Tragende Wirbel. Sie liegen auf dem Flügel, verlaufen quer zur Anströmung (oder besitzen wenigstens eine Komponente quer zur Anströmung) und tragen somit nach dem Joukowsky'schen Satz $dA = \rho V_\infty \Gamma(y') dy'$ zum Auftrieb bei.

Nichttragende Wirbel. Sie verlaufen auf und hinter dem Flügel parallel zur Anströmung und tragen zum Auftrieb nicht bei.

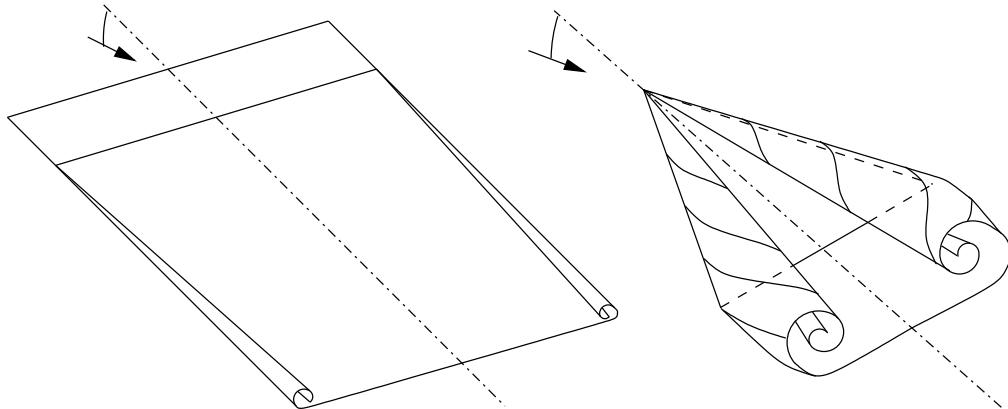
Gebundene Wirbel. Sie liegen auf dem Flügel und bestehen aus allen tragenden Wirbeln und aus den auf dem Flügel verlaufenden Abschnitten der nichttragenden Wirbel bis zur Hinterkante.

Freie Wirbel. Sie beginnen an der Hinterkante und verlaufen parallel zur Anströmung stromabwärts bis ins Unendliche.

Das beschriebene Wirbelmodell wird als in der Flügelebene $z = 0$ liegend angenommen (ebenes Wirbelmodell). Es stimmt mit der Wirklichkeit sehr gut überein für Flügel großer Streckung Λ bei kleinen Anstellwinkeln α . Die Wirbelschicht rollt sich zwar schon von der

Flügel großer Streckung
Lineare Tragflügeltheorie

Flügel kleiner Streckung
Nichtlineare Tragflügeltheorie



Seite her auf, aber die Rückwirkungen auf den Flügel sind vernachlässigbar klein. Bei ebenem Wirbelsystem ist der Auftrieb linear vom Anstellwinkel abhängig. Man erhält so eine lineare Tragflügeltheorie. Bei kleinen Flügelstreckungen und größeren Anstellwinkeln dagegen liegt das Wirbelsystem nicht mehr in einer Ebene. Der Auftrieb ist dann nicht mehr linear vom Anstellwinkel abhängig, und man erhält eine nichtlineare Tragflügeltheorie.

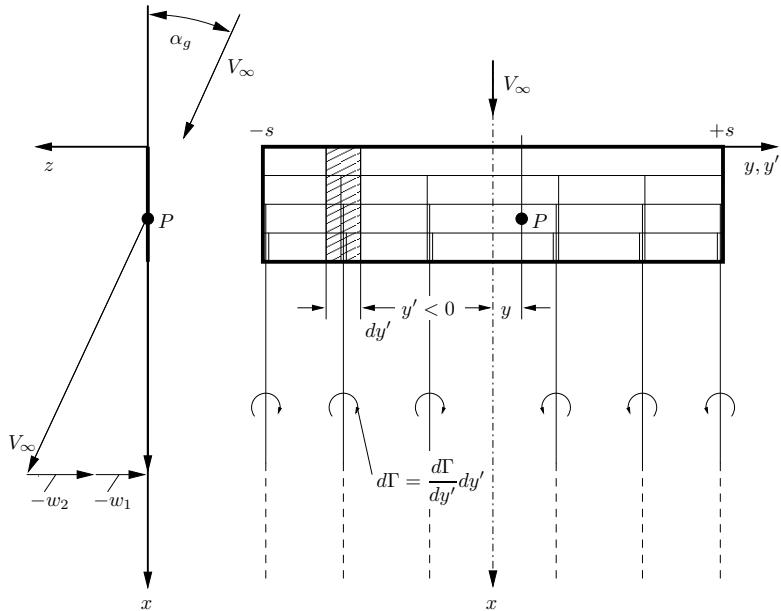
2.4 Der ungepfeilte Flügel großer Streckung

2.4.1 Die Prandtl'sche Integralgleichung

Die Theorie des ungepfeilten Flügels stammt von Prandtl (1918/19). Dies ist die klassische Tragflügeltheorie, die in allen Lehrbüchern in Anlehnung an die Originalarbeiten abgehandelt wird. Diese Theorie wurde von Küchemann neu interpretiert und als Kapitel in dem Lehrbuch von Thwaites (1960) dargestellt. Damit sind dann auch Erweiterungen auf gepfeilte und schlanke Flügel möglich. Im Folgenden wird die Prandtl'sche Tragflügeltheorie in Anlehnung an die Darstellung von Küchemann abgehandelt.

Es wird ein ungepfeilter Flügel großer Streckung (Λ groß) bei kleinem Anstellwinkel (α_g klein) betrachtet. Darüberhinaus sei vorübergehend angenommen, dass der Flügel aus ebenen Plattenprofilen aufgebaut ist, die gegenüber der Anströmung V_∞ den geometrischen Anstellwinkel $\alpha_g(y)$ besitzen. Es wird ein ebenes Wirbelsystem in der Ebene $z = 0$ verwendet, das wie hergeleitet aus tragenden und nichttragenden Wirbeln zusammengesetzt ist. Im beliebigen Aufpunkt $P(x, y)$ auf dem Flügel induzieren

$$\begin{aligned} \text{die tragenden Wirbel} & : w_1(x, y) \\ \text{und die nichttragenden Wirbel} & : w_2(x, y) , \quad \text{jeweils in } z\text{-Richtung .} \end{aligned}$$



Damit lautet die kinematische Strömungsbedingung für einen Plattenflügel unter dem geometrischen Anstellwinkel α_g

$$\alpha_g(y) = -\frac{w(x, y)}{V_\infty} = -\frac{w_1(x, y)}{V_\infty} - \frac{w_2(x, y)}{V_\infty} .$$

Aus dieser Gleichung soll nun die unbekannte Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$ berechnet werden unter der Voraussetzung großer Flügelstreckung Λ . Dabei werden die beiden Anteile $w_1(x, y)$ und $w_2(x, y)$ getrennt ermittelt.

Berechnung des Anteils $w_2(x, y)$. Dieser Anteil röhrt von den nichttragenden Wirbeln her. Bei Flügeln großer Streckung sind dabei die gebundenen Teile der nichttragenden Wirbel kurz, und ihre Wirkung wird vernachlässigt. Es wird also nur die Induktion der freien Wirbel berücksichtigt. Sie wird für den Aufpunkt an der Hinterkante des Schnittes $y = \text{const.}$ (der den Punkt P enthält) berechnet, und dabei wird für Flügel großer Streckung angenommen, dass diese induzierte Geschwindigkeit über der (kurzen) Flügeltiefe $l(y)$ konstant ist. Damit hängt $w_2(y)$ nur noch von y ab.

Die Stärke eines an der induzierenden Stelle y' abgehenden freien Wirbels ist

$$d\Gamma = \frac{d\Gamma}{dy'} dy' .$$

Es handelt sich um einen halbunendlich langen Wirbel, dessen Induktion im Abstand $y - y'$ (mit $y' < 0$ laut Figur) seitwärts vom Wirbelende sich nach dem Biot-Savart'schen Gesetz zu

$$-d w_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}$$

ergibt. Die Induktion aller dieser freien Wirbel im Aufpunkt an der Hinterkante folgt durch Integration

$$-\frac{w_2(y)}{V_\infty} = \alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \oint_{-s}^{+s} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'} .$$

Bei $y = y'$ ist der Integrand singulär, so dass wieder der Cauchy'sche Hauptwert zu bilden ist. Die Wirkung der freien Wirbelschicht hinter dem Flügel auf die Strömungsverhältnisse im Schnitt $y = \text{const.}$ besteht also in einem dort induzierten Anstellwinkel $\alpha_i(y)$, um den die Anströmung örtlich gedreht wird.

Berechnung des Anteils $w_1(x, y)$. Dieser Anteil röhrt von den tragenden Wirbeln her. Für die Berechnung ihrer Induktion im Aufpunkt $P(x, y)$ wird für Flügel großer

Streckung angenommen, dass diese tragenden Wirbel mit der im Schnitt $y = \text{const.}$ vorhandenen Wirbeldichtenverteilung $k(x', y)$ beidseitig ins Unendliche gehen. Die Endlichkeit der Spannweite dieser Wirbel und die Veränderlichkeit ihrer Stärke mit der Spannweitenkoordinate werden also vernachlässigt. Mithin liegt dadurch ein 2D Problem mit den Strömungsverhältnissen im Schnitt $y = \text{const.}$ vor. Da der Flügelschnitt eine ebene Platte darstellt, liegt in Tiefenrichtung für $k(x', y)$ eine 1. Birnbaum'sche Normalverteilung vor, und diese liefert einen über der Flügeltiefe konstanten Abwind

$$-\frac{w_1(y)}{V_\infty} = \frac{1}{2\pi V_\infty} \int_0^l \frac{k(x', y)}{x - x'} dx' = \alpha_e(y) \quad ,$$

und α_e ist der zugehörige Anstellwinkel des 2D Problems. Unter diesem effektiven Anstellwinkel muss der Schnitt $y = \text{const.}$ als ebenes Problem angeströmt werden, damit die dort vorhandenen tragenden Wirbel den zugehörigen örtlichen Auftrieb

$$dA = \rho V_\infty \Gamma(y) dy$$

und damit die Zirkulation $\Gamma(y)$ liefern. Aus der 2D Plattenströmung folgt mit $c_a = 2\pi \alpha_e$

$$\alpha_e(y) = \frac{c_a(y)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{dA}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 l dy}$$

und mit dem obigen Ausdruck für dA folgt weiter

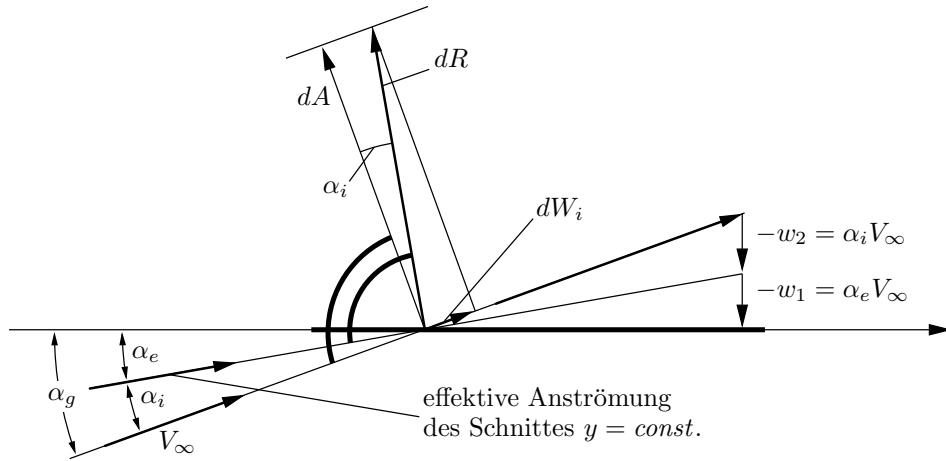
$$-\frac{w_1(y)}{V_\infty} = \alpha_e(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{2\rho V_\infty \Gamma(y) dy}{\rho V_\infty^2 l dy} = \frac{\Gamma(y)}{\pi l V_\infty} \quad .$$

Wegen der Beschränkung auf Plattenprofile ist auch der Anteil $w_1(y)$ unabhängig von x .

Strömungsverhältnisse im Schnitt $y = \text{const.}$ Setzt man die beiden Ergebnisse für $w_1(y)$ und $w_2(y)$ in die kinematische Strömungsbedingung ein, so folgt zunächst

$$\alpha_g(y) = -\frac{w_1(y)}{V_\infty} - \frac{w_2(y)}{V_\infty} = \alpha_e(y) + \alpha_i(y) \quad .$$

Der geometrische Anstellwinkel α_g setzt sich aus zwei Anteilen α_e und α_i zusammen. Dies lässt sich folgendermaßen interpretieren: Am Flügel endlicher Streckung wird durch den



Einfluss der abgehenden freien Wirbelschicht in jedem Schnitt $y = \text{const.}$ die Strömung um den induzierten Anstellwinkel $\alpha_i(y)$ gedreht. α_i stellt den Einfluss der Endlichkeit der Spannweite auf den betrachteten Schnitt $y = \text{const.}$ dar. Der Profilschnitt wird folglich unter dem effektiven Anstellwinkel $\alpha_e(y) = \alpha_g(y) - \alpha_i(y)$ angeströmt und verhält sich dann wie beim ebenen Problem.

An dieser Stelle kann nun die eingangs vorgenommene Beschränkung auf Plattenprofile fallengelassen werden: Liegt eine Skelettfläche mit Wölbung vor, so kann jeder Profilschnitt ersetzt werden durch eine ebene Platte, die in der Nullauftriebsrichtung des zugehörigen gewölbten Skeletts angeordnet wird, so dass der richtige örtliche Auftrieb und die richtige örtliche Zirkulation entsteht. Bezüglich der Wirbeldichtenverteilung und der Druckverteilung kommt dann noch das unter seinem Nullauftriebwinkel angeströmte Skelett hinzu. Dabei entsteht jedoch kein Auftrieb, so dass keine zusätzlichen freien Wirbel entstehen. Beliebige Profile werden also durch ebene Platten ersetzt, die in der jeweiligen Nullauftriebsrichtung angeordnet sind. Auch die relative Profildicke kann berücksichtigt werden, indem in der Beziehung für α_e

$$\alpha_e(y) = \frac{c_a(y)}{d c_a / d \alpha_e}$$

statt 2π der Auftriebsanstieg des vorliegenden Profils eingesetzt wird. Damit ist gezeigt, dass im Rahmen der vorliegenden Theorie alle Profileigenschaften berücksichtigt werden können. Die Rechnungen werden für eine Verteilung des geometrischen Anstellwinkels

$$\alpha_{g_{Ersatz}}(y) = \alpha_g(y) - \alpha_0(y)$$

durchgeführt. Nach Abzug von $\alpha_i(y)$ verbleibt ein ebenes Problem, in dem alle Profileigenschaften (Auftriebsanstieg, Nullauftriebwinkel) berücksichtigt werden können. Dabei kann man die Daten aus Profilkatalogen verwenden.

Die Drehung der Anströmung in jedem Schnitt $y = \text{const.}$ hat noch eine weitere Konsequenz: Die resultierende Luftkraft dR steht senkrecht auf der effektiven

Anströmung. Sie hat Komponenten senkrecht und parallel zur Anströmung

$$dA = dR \cos \alpha_i \approx dR$$

$$dW_i = dR \sin \alpha_i \approx \alpha_i dA .$$

Daraus folgt durch Integration für den Auftrieb

$$A = \int_{-s}^{+s} dA = \rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy .$$

Der auftretende Widerstand heißt induzierter Widerstand. Für ihn ergibt sich durch Integration

$$W_i = \int_{-s}^{+s} dW_i = \int_{-s}^{+s} \alpha_i dA = \rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \alpha_i(y) \Gamma(y) dy .$$

Jeder Auftrieb erzeugende Tragflügel erfährt auch in reibungsloser Strömung einen Widerstand, den induzierten Widerstand. Seine Entstehung lässt sich physikalisch so deuten, dass die pro Zeiteinheit den freien Wirbel hinter dem Tragflügel zugeführte kinetische Energie die zur Überwindung des induzierten Widerstandes notwendige Leistung darstellt.

Setzt man nun in die kinematische Strömungsbedingung die berechneten Ergebnisse für $\alpha_e(y)$ und $\alpha_i(y)$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} \alpha_g(y) &= \alpha_e(y) + \alpha_i(y) \\ \alpha_g(y) &= \frac{2\Gamma}{(dc_a/d\alpha_e)lV_\infty} + \frac{1}{4\pi V_\infty} \oint_{-s}^{+s} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'} . \end{aligned}$$

Führt man noch dimensionslose Größen ein entsprechend

$$\eta = \frac{y}{s} = \frac{2y}{b} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\Gamma}{bV_\infty} = \frac{\Gamma}{2sV_\infty} ,$$

so ergibt sich

$$\alpha_g(\eta) = \frac{2b\gamma(\eta)}{(dc_a/d\alpha_e)l(\eta)} + \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} .$$

Im Sonderfall $dc_a/d\alpha_e = 2\pi$ folgt

$$\alpha_g(\eta) = \frac{b\gamma(\eta)}{\pi l(\eta)} + \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} .$$

Dies ist die Prandtl'sche Integralgleichung für die Zirkulationsverteilung an ungepfeilten Flügeln großer Streckung. Sie liefert den Zusammenhang zwischen

- Flügelgeometrie: Grundriss $l(\eta)$, Verwindung $\alpha_g(\eta)$ und
- Zirkulationsverteilung: $\gamma(\eta)$.

Die beiden Hauptaufgaben finden sich hier wie folgt wieder:

Entwurfsaufgabe:

- Gegeben : Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta)$
- Wählen : $\alpha_g(\eta)$ oder $l(\eta)$
- Gesucht : $l(\eta)$ oder $\alpha_g(\eta)$ je nach Wahl
- Lösung : Integrationsaufgabe, wobei aber das Integral einen singulären Kern aufweist. Vergleichsweise einfach.

Nachrechnungsaufgabe:

- Gegeben : Flügelgeometrie, $l(\eta)$ und $\alpha_g(\eta)$
- Gesucht : Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta)$
- Lösung : Integralgleichung 2. Art, wobei das Integral einen singulären Kern aufweist. Vergleichsweise schwierig.

Verfahren zur Lösung der Nachrechnungsaufgabe werden im Folgenden behandelt. Für bekannte Lösung $\gamma(\eta)$ folgt für den örtlichen Auftriebsbeiwert

$$c_a(\eta) = \frac{dA}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 l dy} = \frac{2b}{l(\eta)} \gamma(\eta) .$$

Damit ist der Gesamtauftrieb

$$A = \int_{-s}^{+s} dA = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \int_{-s}^{+s} c_a(y) l(y) dy$$

und der Gesamtauftriebsbeiwert

$$c_A = \frac{A}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 S} = \frac{1}{S} \int_{-s}^{+s} c_a(y) l(y) dy = \frac{s^2}{S} \int_{-1}^{+1} c_a(\eta) \frac{l(\eta)}{s} d\eta .$$

Setzt man noch $c_a(\eta)$ ein und berücksichtigt man $\Lambda = b^2/S$, so ergibt sich mit $c_a l/s = 4\gamma$

$$c_A = \frac{4s^2}{S} \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) d\eta = \Lambda \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) d\eta .$$

Für den Beiwert des induzierten Widerstandes folgt analog

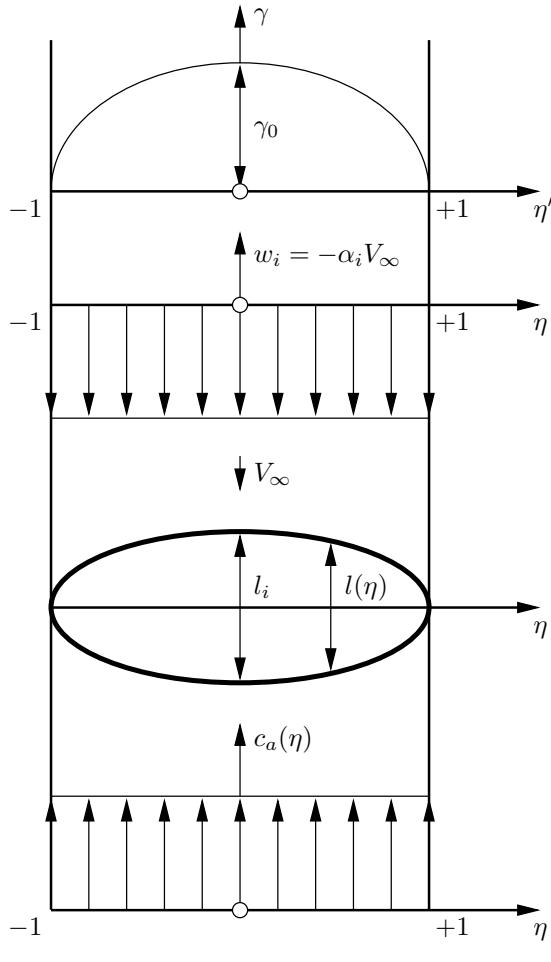
$$c_{W_i} = \frac{W_i}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 S} = \frac{1}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 S} \int_{-s}^{+s} \alpha_i dA = \Lambda \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) \alpha_i(\eta) d\eta .$$

Bezüglich des Nickmomentes ergibt sich aus der Prandtl'schen Tragflügeltheorie zunächst kein Ergebnis, weil die x-Abhängigkeit auf Grund der Vereinfachungen entfallen ist. Sind die Profile ebene Platten, so liegt in jedem Schnitt $y = const.$ eine 1. Birnbaum'sche Verteilung vor, und die örtliche Luftkraft greift im $l/4$ -Punkt an. Bei gewölbten Profilen kommt noch die Nullverteilung der Wirbeldichte hinzu, die einen örtlichen Nullmomentenbeiwert c_{m0} und damit eine Verschiebung des Druckpunktes gegenüber dem örtlichen $l/4$ -Punkt von $-c_{m0}/c_a$ nach hinten bewirkt. Damit ist für beliebige Verläufe der örtlichen $l/4$ -Linie die Lage der örtlichen Luftkraft bekannt und der Nickmomentenbeiwert berechenbar.

2.4.2 Tragflügel mit elliptischer Zirkulationsverteilung

2.4.2.1 Auftriebsverteilung

In diesem Abschnitt soll vorübergehend die Entwurfsaufgabe betrachtet werden, wobei eine elliptische Zirkulationsverteilung vorgegeben werden soll. In diesem Fall ergibt sich eine einfache Lösung, die von großer praktischer Bedeutung ist.



Die vorgegebene Zirkulationsverteilung sei

$$\gamma(\eta') = \gamma_0 \sqrt{1 - \eta'^2} ,$$

wobei γ_0 den Wert in der Flügelmitte darstellt. Damit ergibt sich für den induzierten Anstellwinkel

$$\alpha_i(\eta) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} ,$$

mit

$$\frac{d\gamma}{d\eta'} = \gamma_0 \frac{-2\eta'}{2\sqrt{1 - \eta'^2}}$$

$$\alpha_i = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{\eta'}{\sqrt{1 - \eta'^2}} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} .$$

Die Lösung des Integrals erfolgt mit Hilfe der Substitution

$$\eta' = \cos \vartheta' : \eta' = 1 \rightarrow \vartheta' = 0$$

$$d\eta' = -\sin \vartheta' d\vartheta' : \eta' = -1 \rightarrow \vartheta' = \pi$$

$$\sqrt{1 - \eta'^2} = \sin \vartheta'$$

Man erhält so ein Glauert'sches Integral zur Bildung des Cauchy'schen Hauptwertes:

$$\alpha_i(\vartheta) = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \oint_0^\pi \frac{\cos \vartheta' \sin \vartheta'}{\sin \vartheta' (\cos \vartheta - \cos \vartheta')} d\vartheta' = -\frac{\gamma_0}{2\pi}(-\pi)$$

oder

$$\alpha_i = \frac{\gamma_0}{2} = \text{const.}$$

Bei elliptischer Zirkulationsverteilung ist der induzierte Anstellwinkel α_i längs der Spannweite konstant. Bei der Festlegung der Flügelgeometrie gibt es nun Wahlmöglichkeiten: Für jeden Grundriss $l(\eta)$ gibt es eine Anstellwinkelverteilung $\alpha_g(\eta)$, verwirklicht durch Verwindung, die eine elliptische Zirkulationsverteilung bewirkt. Für jede Verwindung $\alpha_g(\eta)$ gibt es einen Grundriss $l_i(\eta)$, der elliptische Zirkulationsverteilung zur Folge hat. Allgemein gilt: Es gibt unendlich viele Kombinationen von Grundrissform $l(\eta)$ und Verwindung $\alpha_g(\eta)$, die zu einer elliptischen Zirkulationsverteilung führen.

Unter der Annahme eines unverwundenen Tragflügels folgt aus $\alpha_g(\eta) = \alpha_e(\eta) + \alpha_i(\eta)$ mit $\alpha_g = \text{const.}$ und $\alpha_i = \text{const.}$ sofort auch

$$\alpha_e = \frac{c_a(\eta)}{2\pi} = \frac{b\gamma(\eta)}{\pi l(\eta)} = \text{Konst.}$$

Für elliptische Zirkulationsverteilung $\gamma = \gamma_0 \sqrt{1 - \eta^2}$ ist dies nur möglich, wenn auch der Grundriss

$$l(\eta) = l_i \sqrt{1 - \eta^2}$$

elliptisch ist. Damit wird

$$\alpha_e = \frac{c_a}{2\pi} = \frac{b\gamma_0 \sqrt{1 - \eta^2}}{\pi l_i \sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{b\gamma_0}{\pi l_i} ,$$

und für den örtlichen Auftriebsbeiwert c_a folgt

$$c_a = 2\pi \alpha_e = \frac{2b\gamma_0}{l_i} = \text{const.} = c_A .$$

Der unverwundene Ellipsenflügel besitzt also eine längs Spannweite konstante c_a -Verteilung. Für den Gesamtauftriebsbeiwert ergibt sich mit $c_a = \text{const.}$

$$c_A = \frac{1}{S} \int_{-s}^{+s} c_a(y) l(y) dy = \frac{c_a}{S} \int_{-s}^{+s} l(y) dy = c_a ,$$

weil das Integral die Ellipsenfläche S darstellt. Der konstante örtliche Auftriebsbeiwert ist also gleich dem Gesamtauftriebsbeiwert.

Diese Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Ein Tragflügel mit elliptischer Zirkulationsverteilung besitzt eine längs Spannweite konstante Verteilung des induzierten Anstellwinkels α_i .
- Ein unverwundener Tragflügel mit elliptischer Zirkulationsverteilung besitzt einen elliptischen Grundriss.
- Bei einem unverwundenen Ellipsenflügel ist längs Spannweite
 - die Zirkulationsverteilung elliptisch
 - die c_a -Verteilung konstant und
 - die Lastverteilung (wegen $dA \sim c_a(y)l(y)dy$)

$$\frac{dA}{dy} \sim c_a l(\eta) = c_a l_i \sqrt{1 - \eta^2}$$

elliptisch. Es liegt also eine elliptische Auftriebsverteilung längs Spannweite vor.

Für das Seitenverhältnis eines Ellipsenflügels gilt

$$\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{b^2}{\pi \frac{b}{2} \frac{l_i}{2}} = \frac{4b}{\pi l_i} \quad .$$

Damit ist der induzierte Anstellwinkel

$$\alpha_i = \frac{\gamma_0}{2} = \frac{c_A l_i}{4b} \frac{\pi}{\pi} = \frac{c_A}{\pi \Lambda} = const.$$

Dieses Ergebnis war bereits früher (Vorlesung Strömungsmechanik II) ohne Beweis verwendet worden. Es gilt also strenggenommen nur für elliptische Zirkulationsverteilung. Mit diesem Ergebnis lässt sich der Beiwert des induzierten Widerstandes berechnen

$$c_{W_i} = \Lambda \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) \alpha_i(\eta) d\eta = \Lambda \alpha_i \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) d\eta = \alpha_i c_A$$

und es folgt

$$c_{W_i} = \frac{c_A^2}{\pi \Lambda} \quad .$$

Auch dieses Ergebnis wurde bereits früher (ohne Beweis) verwendet. Es gilt nur für elliptische Zirkulationsverteilung, und im Abschnitt 2.4.3 wird gezeigt, dass es das Minimum für vorgegebenes c_A darstellt. Darin liegt die große praktische Bedeutung des Tragflügels mit elliptischer Zirkulationsverteilung.

Für die Auftriebsbeiwerte gilt

$$c_a = 2\pi\alpha_e = 2\pi(\alpha_g - \alpha_i) = c_A \quad .$$

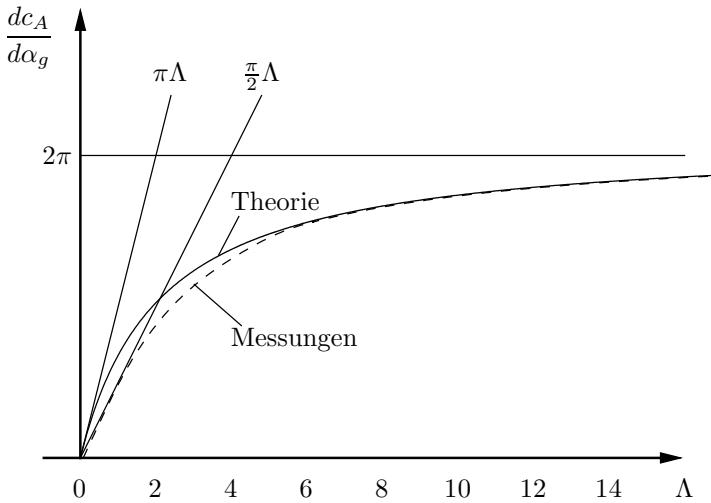
Damit folgt

$$c_A = 2\pi \left(\alpha_g - \frac{c_A}{\pi\Lambda} \right) = 2\pi\alpha_g - \frac{2}{\Lambda}c_A$$

$$c_A = \frac{2\pi\alpha_g}{1 + \frac{2}{\Lambda}} = \frac{2\pi\Lambda}{\Lambda + 2}\alpha_g$$

und der Auftriebsanstieg ist

$$\boxed{\frac{dc_A}{d\alpha_g} = \frac{2\pi\Lambda}{\Lambda + 2} \quad .}$$



Für die Funktion existieren folgende Grenzwerte:

$$\Lambda \rightarrow \infty : \frac{dc_A}{d\alpha_g} = 2\pi$$

$$\Lambda \rightarrow 0 : \frac{dc_A}{d\alpha_g} = \pi\Lambda$$

Der tatsächliche Grenzwert für $\Lambda \rightarrow 0$ für vollkommenere Theorien (Tragflächentheorie, Theorie schlanker Körper) ist jedoch

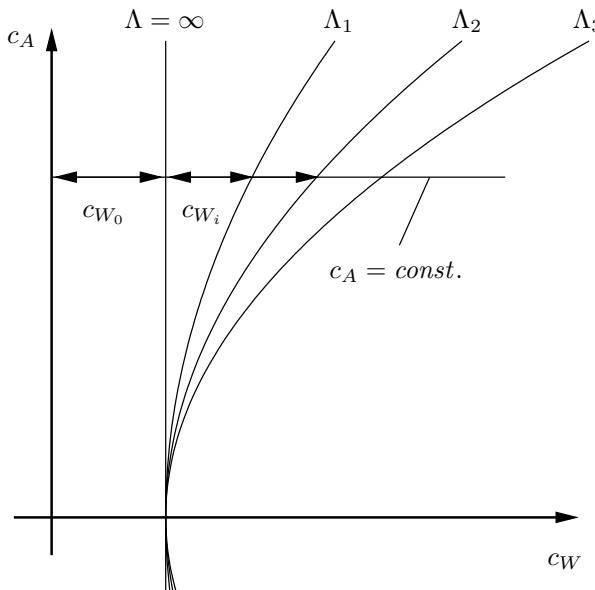
$$\Lambda \rightarrow 0 : \frac{dc_A}{d\alpha_g} = \frac{\pi}{2}\Lambda \quad .$$

Die vorliegende Theorie versagt also für Tragflügel mit kleinen Streckungen Λ , und dies liegt an den Vernachlässigungen, die bei der Herleitung der Prandtl'schen Integralgleichung getroffen wurden. Die Ergebnisse sind daher nur für Flügel größerer Streckung $\Lambda > 5$ (evtl. $\Lambda > 3$) brauchbar.

2.4.2.2 Prandtl'sche Umrechnungsformeln

Mit den in Abschnitt 2.4.2.1 hergeleiteten Beziehungen ist es möglich, die aerodynamischen Beiwerte von Flügeln mit verschiedenen Seitenverhältnissen Λ ineinander umzurechnen. Dies ist beispielsweise für Messungen interessant, die nur für *ein* Seitenverhältnis ausgeführt zu werden brauchen. Durch Umrechnung erhält man dann daraus die Ergebnisse für Flügel mit anderer Streckung, die dasselbe Profil aufweisen und sich nur durch das Seitenverhältnis vom vermessenen Flügel unterscheiden.

Umrechnung der Polaren.



Für die Polaren gilt (siehe Vorlesung Strömungsmechanik II)

$$c_W = c_{W0} + c_{Wi} = c_{W0} + \frac{c_A^2}{\pi \Lambda} .$$

Dabei ist $c_{W0} = c_W(c_A = 0) = c_W(\Lambda \rightarrow \infty)$ der Profilwiderstandsbeiwert. Für zwei Flügel mit gleichem Profil und den Seitenverhältnissen Λ_1 und Λ_2 lässt sich schreiben

$$c_{W0} = c_{W1} - \frac{c_A^2}{\pi \Lambda_1}$$

$$c_{W0} = c_{W2} - \frac{c_A^2}{\pi \Lambda_2}$$

Für gleiches Profil folgt daraus

$$c_{W2} = c_{W1} + \frac{c_A^2}{\pi} \left(\frac{1}{\Lambda_2} - \frac{1}{\Lambda_1} \right) \quad \text{bei } c_A = \text{const.}$$

Dies ist die Prandtl'sche Umrechnungsformel für die Widerstandsbeiwerte c_W bei konstantem Auftriebsbeiwert c_A .

Umrechnung der Auftriebskurven.

Für die Auftriebskurven gilt für Plattenflügel ($\alpha_0 = 0$)

$$\alpha_g = \alpha_e + \alpha_i = \frac{c_A}{2\pi} + \frac{c_A}{\pi\Lambda} \quad \text{mit} \quad \frac{dc_a}{d\alpha_e} = \left(\frac{dc_A}{d\alpha} \right)_\infty = 2\pi$$

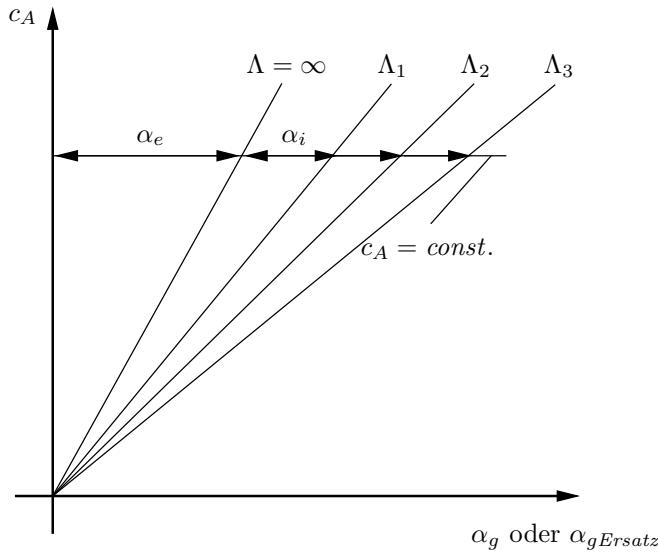
oder allgemein für beliebiges Profil ($\alpha_0 \neq 0$)

$$\alpha_{gErsatz} = \alpha_g - \alpha_0 = \frac{c_A}{(dc_A/d\alpha)_\infty} + \frac{c_A}{\pi\Lambda} \quad \text{mit} \quad \frac{dc_a}{d\alpha_e} = \left(\frac{dc_A}{d\alpha} \right)_\infty \neq 2\pi \quad .$$

Dieser Zusammenhang wurde in der Vorlesung Strömungsmechanik II benutzt. Für zwei Flügel mit gleichem Profil und den Seitenverhältnissen Λ_1 und Λ_2 lässt sich schreiben

$$\frac{c_A}{2\pi} = \alpha_{e1} = \alpha_{g1} - \alpha_{i1} = \alpha_{g1} - \frac{c_A}{\pi\Lambda_1}$$

$$\frac{c_A}{2\pi} = \alpha_{e2} = \alpha_{g2} - \alpha_{i2} = \alpha_{g2} - \frac{c_A}{\pi\Lambda_2}$$



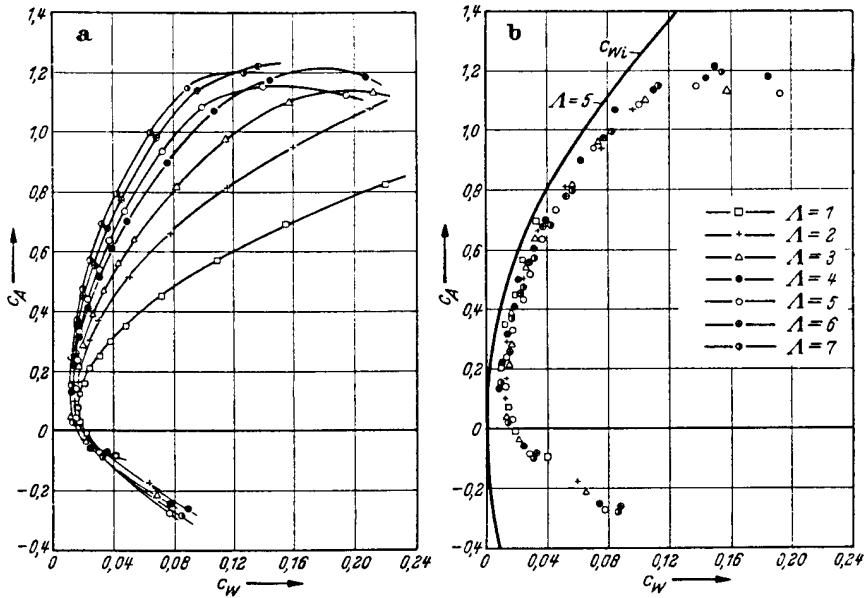
Bei $c_A = \text{const.}$ ist $\alpha_{e1} = \alpha_{e2}$ und es folgt

$$\alpha_{g2} = \alpha_{g1} + \frac{c_A}{\pi} \left(\frac{1}{\Lambda_2} - \frac{1}{\Lambda_1} \right) \quad \text{bei } c_A = \text{const.}$$

Dies ist die Prandtl'sche Umrechnungsformel für die geometrischen Anstellwinkel bei konstantem Auftriebsbeiwert c_A .

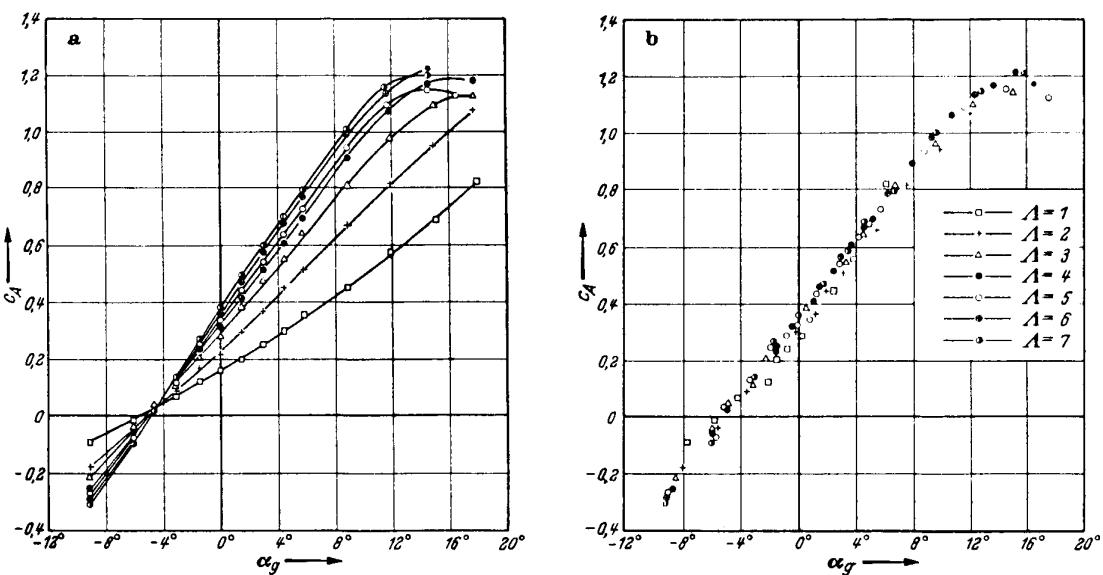
Die Umrechnungsformeln gelten auf Grund ihrer Herleitung für Tragflügel mit elliptischer Zirkulationsverteilung, also z.B. für unverwundene Ellipsenflügel. Sie sind jedoch in guter Näherung auch auf andere Flügelformen, insbesondere Rechteckflügel, anzuwenden.

Experimentelle Nachprüfung der Prandtl'schen Umrechnungsformeln



Umrechnung der Widerstandsbeiwerte (Rechteckflügel) nach [4]

- a) Gemessene Polaren für $\Lambda = 1$ bis 7
- b) Auf $\Lambda = 5$ umgerechnete Polaren



Umrechnung der Anstellwinkel (Rechteckflügel) nach [4]

- a) Gemessene Kurven $c_A(\alpha_g)$ für $\Lambda = 1$ bis 7
- b) Auf $\Lambda = 5$ umgerechnete Kurven

2.4.3 Lösung der Prandtl'schen Integralgleichung

Die zu lösende Prandtl'sche Integralgleichung lautet

$$\alpha_g(\eta) = \frac{b\gamma(\eta)}{\pi l(\eta)} + \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} .$$

Das Integral mit singulärem Kern kann durch Übergang auf trigonometrische Variable

$$\eta = \cos \vartheta , \quad \eta' = \cos \vartheta' , \quad d\eta' = -\sin \vartheta' d\vartheta'$$

auf das Glauert'sche Integral zurückgeführt werden. Für die Zirkulationsverteilung wird der Ansatz

$$\boxed{\gamma(\vartheta) = 2 \sum_{\mu=1}^M a_\mu \sin \mu \vartheta}$$

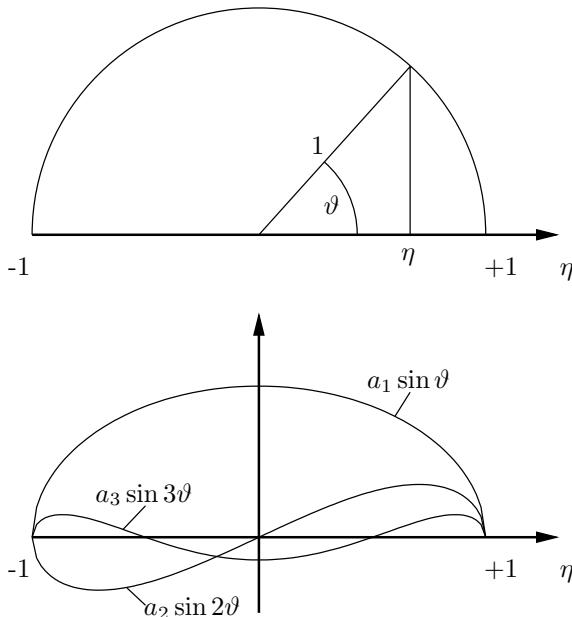
gewählt. Er lautet ausführlich geschrieben

$$\gamma(\vartheta) = 2(a_1 \sin \vartheta + a_2 \sin 2\vartheta + \dots + a_M \sin M\vartheta) .$$

Analysiert man die einzelnen Glieder dieses Ansatzes, so folgt für das 1. Glied

$$\gamma_1 = 2a_1 \sin \vartheta$$

$$\gamma_1 = 2a_1 \sqrt{1 - \eta^2} .$$



Dies ist die elliptische Zirkulationsverteilung. Weitere Glieder sind in der Skizze dargestellt. Durch den Ansatz wird also eine beliebige Zirkulationsverteilung durch eine elliptische Verteilung und weitere symmetrische und antimetrische Verteilungen beschrieben. Mit dem Ansatz ergibt sich für den induzierten Anstellwinkel

$$\alpha_i(\eta) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} = -\frac{1}{2\pi} \oint_0^\pi \frac{d\gamma}{d\vartheta'} \frac{d\vartheta'}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} .$$

mit

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\vartheta'} &= 2 \sum_{\mu=1}^M a_\mu \mu \cos \mu \vartheta' \\ \alpha_i(\vartheta) &= - \sum_{\mu=1}^M a_\mu \mu \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \mu \vartheta'}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} d\vartheta' \quad .\end{aligned}$$

Mit der Lösung des Glauert'schen Integrals folgt weiter

$$\alpha_i(\vartheta) = \sum_{\mu=1}^M a_\mu \mu \frac{\sin \mu \vartheta}{\sin \vartheta} \quad .$$

Der induzierte Anstellwinkel ist also im allgemeinen eine Funktion der Spannweitenkoordinate η (oder ϑ). Lediglich im Sonderfall einer elliptischen Zirkulationsverteilung ($a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = \dots a_n = 0, \mu = 1$) ergibt sich mit

$$\alpha_i = a_1 = \text{const.}$$

eine Konstante. Mit dem allgemeinen Ergebnis für $\alpha_i(\vartheta)$ folgt aus der Prandtl'schen Integralgleichung

$$\alpha_g(\vartheta) = \frac{2b}{\pi l(\vartheta)} \sum_{\mu=1}^M a_\mu \sin \mu \vartheta + \sum_{\mu=1}^M a_\mu \mu \frac{\sin \mu \vartheta}{\sin \vartheta}$$

oder

$$\alpha_g \sin \vartheta = \sum_{\mu=1}^M a_\mu \sin \mu \vartheta \left(\frac{2b}{\pi l(\vartheta)} \sin \vartheta + \mu \right) \quad .$$

Damit ist die Integration mit Hilfe der Glauert'schen Formel gelöst, und die Prandtl'sche Integralgleichung ist in eine algebraische Gleichung überführt. Die beiden Hauptaufgaben der Aerodynamik stellen sich nun wie folgt dar:

- Entwurfsaufgabe:** Gegeben : Zirkulationsverteilung $\gamma(\vartheta)$ durch die Koeffizienten a_μ
 Wählen : Grundriss $l(\vartheta)$ oder Verwindung $\alpha_g(\vartheta)$
 Gesucht : $\alpha_g(\vartheta)$ oder $l(\vartheta)$ je nach Wahl

Die Lösung ist mit den gegebenen und gewählten Größen bekannt.

- Nachrechnungsaufgabe:** Gegeben : Flügelgeometrie $l(\vartheta)$ und $\alpha_g(\vartheta)$
 Gesucht : Zirkulationsverteilung, also Koeffizienten a_μ .
 Lösung : Verschiedene Verfahren (Abschnitt 2.3.4)

Mit Hilfe der (dann) bekannten Koeffizienten lassen sich die aerodynamischen Beiwerte berechnen.

Der Auftriebsbeiwert ist

$$c_A = \Lambda \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) d\eta = \Lambda \int_0^\pi \gamma(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad .$$

Setzt man den Ansatz für $\gamma(\vartheta)$ ein, so folgt

$$c_A = 2\Lambda \sum_{\mu=1}^M a_\mu \int_0^\pi \sin \mu \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \quad ,$$

und mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehungen der trigonometrischen Funktionen

$$\int_0^\pi \sin \mu \vartheta \sin \nu \vartheta d\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \nu = \mu \end{cases}$$

bleibt schließlich

$$c_A = \pi \Lambda a_1 \quad .$$

Nur das erste Glied des Ansatzes (nämlich die elliptische Zirkulationsverteilung) liefert einen Beitrag zum Gesamtauftriebsbeiwert. Die übrigen Glieder tragen nichts bei.

Betrachtet man den Grenzfall sehr kleiner Flügelstreckungen $\Lambda \rightarrow 0$, so ist $b \ll l$. Damit entfällt in der algebraischen Gleichung das Glied $2b \sin \vartheta / \pi l(\vartheta)$. Die verbleibende Gleichung

$$\alpha_g \sin \vartheta = \sum_{\mu=1}^M a_\mu \mu \sin \mu \vartheta$$

wird durch das Glied $\mu = 1$ allein erfüllt

$$\alpha_g = a_1$$

und für alle anderen Glieder muss gelten

$$a_\mu = 0 \quad \text{für } \mu = 2, 3, \dots, M.$$

Dies bedeutet, dass alle schlanken Flügel eine elliptische Zirkulationsverteilung besitzen. Obwohl die vorliegende Theorie für kleine Streckungen nicht gilt, wird diese Eigenschaft der Zirkulationsverteilung doch richtig wiedergegeben. Für den Auftriebsbeiwert folgt dann

$$c_A = \pi \Lambda a_1 = \pi \Lambda \alpha_g \quad (\text{für } \Lambda \rightarrow 0)$$

mit dem bereits früher diskutierten Grenzwert

$$\frac{dc_A}{d\alpha_g} = \pi \Lambda \quad (\text{für } \Lambda \rightarrow 0) \quad .$$

Für den Beiwert des induzierten Widerstandes folgt mit dem Ansatz für die Zirkulationsverteilung und dem Ergebnis für $\alpha_i(\vartheta)$

$$\begin{aligned} c_{W_i} &= \Lambda \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) \alpha_i(\eta) d\eta = \Lambda \int_0^\pi \gamma(\vartheta) \alpha_i(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= 2\Lambda \int_0^\pi \left(\sum_{\mu=1}^M a_\mu \sin \mu \vartheta \right) \left(\sum_{\mu=1}^M a_\mu \mu \sin \mu \vartheta \right) d\vartheta . \end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalitätsbeziehungen der trigonometrischen Funktionen tragen nur die Kombinationen von Gliedern zum Integralwert bei, für die beide Summen den gleichen Stand μ besitzen, und es bleibt

$$c_{W_i} = 2\Lambda \sum_{\mu=1}^M \mu a_\mu^2 \frac{\pi}{2} = \pi \Lambda \sum_{\mu=1}^M \mu a_\mu^2 .$$

Mit $\pi \Lambda a_1 = c_A$ lässt sich das Ergebnis schreiben als

$$c_{W_i} = \frac{c_A^2}{\pi \Lambda} + \pi \Lambda \sum_{\mu=2}^M \mu a_\mu^2 .$$

Der erste Ausdruck stammt aus dem ersten Glied a_1 der Zirkulationsverteilung, also aus der elliptischen Zirkulationsverteilung. Der Rest röhrt von den übrigen Gliedern des Ansatzes für die Zirkulationsverteilung. Auch sie tragen zum induzierten Widerstand bei. Unabhängig vom Vorzeichen der Glieder a_2, a_3, \dots, a_M sind ihre Beiträge stets positiv. Daraus folgt: Der induzierte Widerstand ist bei elliptischer Zirkulationsverteilung minimal

$c_{W_{i \min}} = \frac{c_A^2}{\pi \Lambda} .$

Liegt eine davon abweichende Zirkulationsverteilung vor, sind also Glieder a_2, a_3, \dots, a_M vorhanden, so erhöht sich der induzierte Widerstand. Aus diesem Grunde ist man z.B. bei einem Verkehrsflugzeug bestrebt, im Reiseflug elliptische Zirkulationsverteilung zu verwirklichen.

2.4.4 Das Quadraturverfahren von Multhopp

2.4.4.1 Herleitung des Verfahrens

Bei der Nachrechnungsaufgabe ist die Gleichung

$$\alpha_g(\vartheta) \sin(\vartheta) = \sum_{\mu=1}^M a_\mu \sin \mu \vartheta \left(\frac{2b}{\pi l(\vartheta)} \sin \vartheta + \mu \right)$$

für gegebene Abhängigkeiten $l(\vartheta)$ und $\alpha_g(\vartheta)$ zu lösen. Unbekannte sind die Fourierkoeffizienten $a_\mu (\mu = 1, 2, \dots, M)$. Erfüllt man die Gleichung an M diskreten Stellen ϑ , so erhält man ein lineares Gleichungssystem von M Gleichungen für die M unbekannten Koeffizienten a_μ . Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht darin, die unbekannten Fourierkoeffizienten $a_\mu (\mu = 1, 2, \dots, M)$ durch eine Fourieranalyse auf die Werte der Zirkulation $\gamma_n = \gamma(\eta_n) = \gamma(\vartheta_n)$ an diskreten Stellen

$$\eta_n = \cos \vartheta_n \quad \text{mit} \quad \vartheta_n = \frac{n\pi}{M+1} \quad (n = 1, 2, \dots, M)$$

zurückzuführen. Für diese Zirkulationswerte folgt aus dem Ansatz

$$\gamma_n = 2 \sum_{\mu=1}^M a_\mu \sin \mu \vartheta_n$$

Diese Gleichung lautet ausführlich geschrieben

$$\begin{array}{l|l} \sin \mu \vartheta_1 & \gamma_1 = 2(a_1 \sin \vartheta_1 + a_2 \sin 2\vartheta_1 + \dots + a_\mu \sin \mu \vartheta_1 + \dots + a_M \sin M \vartheta_1) \\ \sin \mu \vartheta_n & \gamma_n = 2(a_1 \sin \vartheta_n + a_2 \sin 2\vartheta_n + \dots + a_\mu \sin \mu \vartheta_n + \dots + a_M \sin M \vartheta_n) \\ \sin \mu \vartheta_M & \gamma_M = 2(a_1 \sin \vartheta_M + a_2 \sin 2\vartheta_M + \dots + a_\mu \sin \mu \vartheta_M + \dots + a_M \sin M \vartheta_M) \end{array} .$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den jeweils links angegebenen Termen durch und addiert anschließend, so treten folgende Summen auf [7]

$$\sum_{n=1}^M \sin A \vartheta_n \sin B \vartheta_n = \begin{cases} 0 & \text{für } A \neq B \\ \frac{M+1}{2} & \text{für } A = B \end{cases} .$$

Dies sind die Orthogonalitätsbeziehungen in Summenform. Aus der Addition folgt damit

$$\sum_{n=1}^M \gamma_n \sin \mu \vartheta_n = 2a_\mu \frac{M+1}{2}$$

oder

$$a_\mu = \frac{1}{M+1} \sum_{n=1}^M \gamma_n \sin \mu \vartheta_n .$$

Damit sind die Fourierkoeffizienten a_μ auf die diskreten Werte der Zirkulation γ_n an den Stellen ϑ_n zurückgeführt. Die gleiche Prozedur lässt sich auch in Integralform durchführen. Das Ergebnis ist die Euler-Fourier'sche Formel

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \gamma(\vartheta) \sin \mu \vartheta d\vartheta \quad .$$

Nach beiden Versionen ergibt sich z.B. für $\mu = 1$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \gamma(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) d\eta \\ a_1 &= \frac{1}{M+1} \sum_{n=1}^M \gamma_n \sin \vartheta_n \quad . \end{aligned}$$

Aus einem Vergleich folgt als Integrationsformel für eine Funktion $f(\eta)$, die sich als Fourierreihe darstellen lässt

$$\int_{-1}^{+1} f(\eta) d\eta = \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^M f_n \sin \vartheta_n$$

mit $f_n = f(\eta_n)$, $\eta_n = \cos \vartheta_n$, $\vartheta_n = \frac{n\pi}{M+1}$. Diese Formel wird in der Tragflügelaerodynamik sehr oft zur Integration längs Spannweite benutzt. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist das Ergebnis exakt. Setzt man das Ergebnis der Fourieranalyse in die Gleichung für $\alpha_i(\vartheta)$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} \alpha_i(\vartheta) &= \sum_{\mu=1}^M a_\mu \mu \frac{\sin \mu \vartheta}{\sin \vartheta} \\ &= \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{M+1} \sum_{n=1}^M \gamma_n (\sin \mu \vartheta_n) \mu \frac{\sin \mu \vartheta}{\sin \vartheta} \quad . \end{aligned}$$

Unter Vertauschung der Summationsreihenfolge ergibt sich daraus

$$\alpha_i(\vartheta) = \frac{1}{M+1} \sum_{n=1}^M \gamma_n \sum_{\mu=1}^M \mu \frac{\sin \mu \vartheta_n \sin \mu \vartheta}{\sin \vartheta} \quad .$$

Eine wesentliche Vereinfachung tritt nun ein, wenn man sich darauf beschränkt, den induzierten Anstellwinkel nur an bestimmten diskreten Stellen ν zu berechnen. Hierzu werden dieselben Stellen gewählt, die auch als Stützstellen für die Zirkulationsverteilung dienen. Es sei also

$$\eta_\nu = \eta(\vartheta_\nu) = \cos \vartheta_\nu \quad \text{mit} \quad \vartheta_\nu = \frac{\nu \pi}{M+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, M) \quad .$$

Damit wird

$$\alpha_i(\vartheta_\nu) = \alpha_{i\nu} = \sum_{n=1}^M \gamma_n \sum_{\mu=1}^M \frac{\mu}{M+1} \frac{\sin \mu \vartheta_n \sin \mu \vartheta_\nu}{\sin \vartheta_\nu} \quad .$$

Hierin kennzeichnen

- μ die Glieder des Fourieransatzes
- n die Stützstellen für die Zirkulationsverteilung (induzierende Stellen)
- ν den Aufpunkt, in dem α_i berechnet wird.

Die zweite Summe hängt nur noch von der Lage der induzierenden Stellen und der Aufpunkte ab. Sie kann universell berechnet werden.

Dies führt auf die Koeffizienten

$$\begin{aligned} n = \nu & : b_{\nu\nu} = \sum_{\mu=1}^M \frac{\mu}{M+1} \frac{\sin^2 \mu \vartheta_\nu}{\sin \vartheta_\nu} = \frac{M+1}{4 \sin \vartheta_\nu} \\ n \neq \nu & : b_{\nu n} = - \sum_{\mu=1}^M \frac{\mu}{M+1} \frac{\sin \mu \vartheta_n \sin \mu \vartheta_\nu}{\sin \vartheta_\nu} \quad . \end{aligned}$$

Diese Koeffizienten sind von Multhopp (1938) angegeben worden. Sie sind auf S.83 für $M = 7$ zusammengestellt. Damit lässt sich für den induzierten Anstellwinkel schreiben

$$\alpha_{i\nu} = b_{\nu\nu} \gamma_\nu - \sum_{n=1}^M' b_{\nu n} \gamma_n \quad .$$

Der Strich ('') am Summenzeichen bedeutet, dass das Glied $\nu = n$ auszulassen ist. Setzt man dieses Ergebnis in die Ausgangsgleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} \alpha_{g\nu} &= \alpha_{e\nu} + \alpha_{i\nu} \\ \alpha_{g\nu} &= \frac{b}{\pi l_\nu} \gamma_\nu + b_{\nu\nu} \gamma_\nu - \sum_{n=1}^M' b_{\nu n} \gamma_n \end{aligned}$$

oder

$$\alpha_{g\nu} = \left(\frac{b}{\pi l_\nu} + b_{\nu\nu} \right) \gamma_\nu - \sum_{n=1}^M' b_{\nu n} \gamma_n \quad (\nu = 1, 2, \dots, M) \quad .$$

Damit ist die Prandtl'sche Integralgleichung in ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der M Unbekannten $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M$ überführt. Beide Hauptaufgaben können damit bearbeitet werden.

Aus den bekannten Werten für die Zirkulation $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M$ folgt für den örtlichen Auftriebsbeiwert

$$c_{a\nu} = \frac{2b}{l_\nu} \gamma_\nu \quad .$$

Die Auswertung der Integrale für den Auftriebsbeiwert und den Beiwert des induzierten Widerstandes mit Hilfe der oben gefundenen Integrationsformel führt zu

$$c_A = \Lambda \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) d\eta = \frac{\pi \Lambda}{M+1} \sum_{n=1}^M \gamma_n \sin \vartheta_n$$

$$c_{W_i} = \Lambda \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) \alpha_i(\eta) d\eta = \frac{\pi \Lambda}{M+1} \sum_{n=1}^M \gamma_n \alpha_{in} \sin \vartheta_n .$$

Die zur Auswertung notwendigen Werte α_{in} lassen sich bei bekannter Zirkulationsverteilung $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M$ aus der Summenformel für α_i oder (bequemer) rückwärts aus

$$\alpha_{in} = \alpha_{gn} - \alpha_{en} = \alpha_{gn} - \frac{b\gamma_n}{\pi l_n}$$

ermitteln.

ν	1 (7)	3 (5)		2 (6)	4	
η_ν	0,9239	0,3827		0,7071	0,0000	
$b_{\nu\nu}$	5,2262	2,1648		2,8284	2,0000	
	n			n		
$b_{\nu n}$	2 (6) 4 (4) 6 (2) -	1,8810 0,1464 0,0332 -	0,8398 0,8536 0,0744 -	1 (7) 3 (5) 5 (3) 7 (1)	1,0180 1,0972 0,0973 0,0180	0,0560 0,7887 0,7887 0,0560
$\overline{b_{\nu n}}$	2 4	1,9142 0,1464	0,9142 0,8536	1 3	1,0360 1,1944	0,1121 1,5774

Universelle Koeffizienten für das Multhopp-Verfahren ($M = 7$)

(die nicht aufgeführten Koeffizienten $b_{\nu n}$ sind Null)

2.4.4.2 Anwendung des Verfahrens

Die Aufstellung des linearen Gleichungssystems

$$\left(\frac{b}{\pi l_\nu} + b_{\nu\nu} \right) \gamma_\nu - \sum_{n=1}^M b_{\nu n} \gamma_n = \alpha_{g\nu}$$

für $\nu = 1, 2, \dots, M$ gestaltet sich sehr einfach. Die Koeffizienten $b_{\nu n}$ sind gegeben, viele davon sind Null. Das entstehende Gleichungssystem ist für den allgemeinen Fall ($M = 7$):

ν	η_ν	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	$\alpha_{g\nu}$
1	0,9239	$\frac{b}{\pi l_1} + 5,2262$	- 1,8810	0	- 0,1464	0	- 0,0332	0	α_{g1}
2	0,7071	- 1,0180	$\frac{b}{\pi l_2} + 2,8284$	- 1,0972	0	- 0,0973	0	- 0,0180	α_{g2}
3	0,3827	0	- 0,8398	$\frac{b}{\pi l_3} + 2,1648$	- 0,8536	0	- 0,0744	0	α_{g3}
4	0	- 0,0560	0	- 0,7887	$\frac{b}{\pi l_4} + 2,0000$	- 0,7887	0	- 0,0560	α_{g4}
5	- 0,3827	0	- 0,8398	0	- 0,8536	$\frac{b}{\pi l_5} + 2,1648$	- 0,0744	0	α_{g5}
6	- 0,7071	- 1,0180	0	- 1,0972	0	- 0,0973	$\frac{b}{\pi l_6} + 2,8284$	- 0,0180	α_{g6}
7	- 0,9239	0	- 1,8810	0	- 0,1464	0	- 0,0332	$\frac{b}{\pi l_7} + 5,2262$	α_{g7}

Die Gleichung für den Schnitt $\nu = 1$ lautet beispielsweise

$$\left(\frac{b}{\pi l_1} + 5,2262 \right) \gamma_1 - 1,8810 \gamma_2 - 0,1464 \gamma_4 - 0,0332 \gamma_6 = \alpha_{g1} .$$

Zur Berechnung eines vorgegebenen Flügels sind auf der Hauptdiagonale die bekannten Werte für $b/(\pi l_\nu)$ und auf der rechten Seite die Werte für $\alpha_{g\nu}$ einzusetzen.

Für den Sonderfall einer symmetrischen Zirkulationsverteilung (Beispiel $M = 7$)

$$\gamma_1 = \gamma_7 ; \quad \gamma_2 = \gamma_6 ; \quad \gamma_3 = \gamma_5 ; \quad \gamma_4 = ,$$

lässt sich das Gleichungssystem durch Zusammenfassen reduzieren:

$$\left(\frac{b}{\pi l_\nu} + b_{\nu\nu} \right) \gamma_\nu - \sum_{n=1}^{\frac{M+1}{2}} \bar{b}_{\nu n} \gamma_n = \alpha_{g\nu} \quad \left(\nu = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2} \right) .$$

Die Hauptdiagonale bleibt erhalten, und durch das Zusammenfassen entstehen neue Koeffizienten $\bar{b}_{\nu n}$, die in der Tabelle für $M = 7$ mit aufgeführt sind. Das für symmetrische Zirkulationsverteilungen reduzierte Gleichungssystem lautet für $M = 7$

ν	η_ν	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	$\alpha_{g\nu}$
1	0,9239	$\frac{b}{\pi l_1} + 5,2262$	- 1,9142	0	- 0,1464	α_{g1}
2	0,7071	- 1,0360	$\frac{b}{\pi l_2} + 2,8284$	- 1,1944	0	α_{g2}
3	0,3827	0	- 0,9142	$\frac{b}{\pi l_3} + 2,1648$	- 0,8536	α_{g3}
4	0	- 0,1121	0	- 1,5774	$\frac{b}{\pi l_4} + 2,0000$	α_{g4}

Die Zusammenfassung kann auch im Ausdruck für den Auftriebsbeiwert

$$c_A = \frac{\pi \Lambda}{M+1} \sum_{\nu=1}^M \gamma_\nu \sin \vartheta_\nu = \Lambda \sum_{\nu=1}^{\frac{M+1}{2}} A_\nu \gamma_\nu$$

durchgeführt werden. Die Koeffizienten A_ν sind dann

$$A_\nu = \frac{2\pi \sin \vartheta_\nu}{M+1} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}$$

und

$$A_\nu = \frac{\pi \sin \vartheta_\nu}{M+1} \quad \text{für } \nu = \frac{M+1}{2} .$$

Für die in allen Gleichungssystemen auf der rechten Seite einzusetzenden örtlichen geometrischen Anstellwinkel $\alpha_{g\nu}$ gelten folgende Überlegungen: Auf dem Flügel wird eine Bezugsrichtung, z.B. die Sehne des Mittelschnitts festgelegt. Der Anstellwinkel gegenüber dieser Bezugsrichtung sei α .

Bei einem ungewölbten, unverwundenen Flügel gilt dann

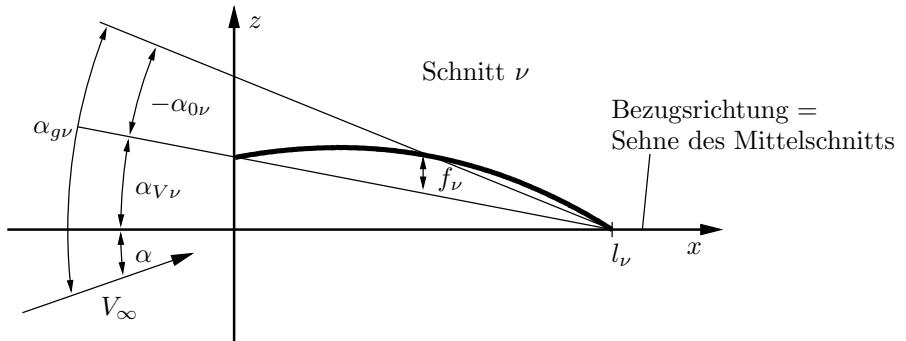
$$\alpha_{g\nu} = \alpha$$

Die Rechnung wird für $\hat{\alpha} = 1$ (Bogenmaß!) durchgeführt. Auf diese Weise erhält man als Endergebnis

$$c_A(\hat{\alpha} = 1) = \frac{dc_A}{d\alpha} ,$$

und man kann daraus leicht die Zirkulation γ und den Auftriebsbeiwert für beliebige Anstellwinkel ermitteln.

Bei einem gewölbten und verwundenen Flügel liegen in einem beliebigen Schnitt $y = const.$ folgende Verhältnisse vor:



Die Sehne des Profils ist gegen die Bezugsebene um den geometrischen Verwindungswinkel $\alpha_{V\nu}$ geneigt. Die Nullauftriebsrichtung des Profils $\alpha_{0\nu} < 0$ ist ebenfalls bekannt. Der einzusetzende örtliche geometrische Anstellwinkel ist dann

$$\alpha_{g\nu} = \alpha - \alpha_{0\nu} + \alpha_{V\nu} .$$

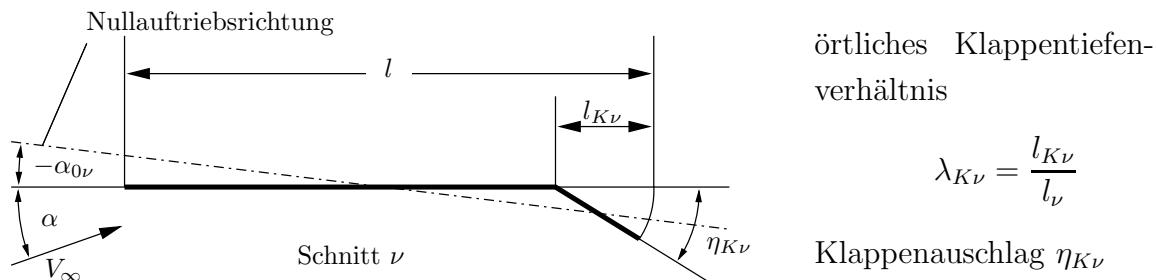
Es wird also stets der Winkel zwischen der Anströmung und der Nullauftriebsrichtung des Profilschnitts verwendet.

2.4.5 Tragflügel mit Klappen

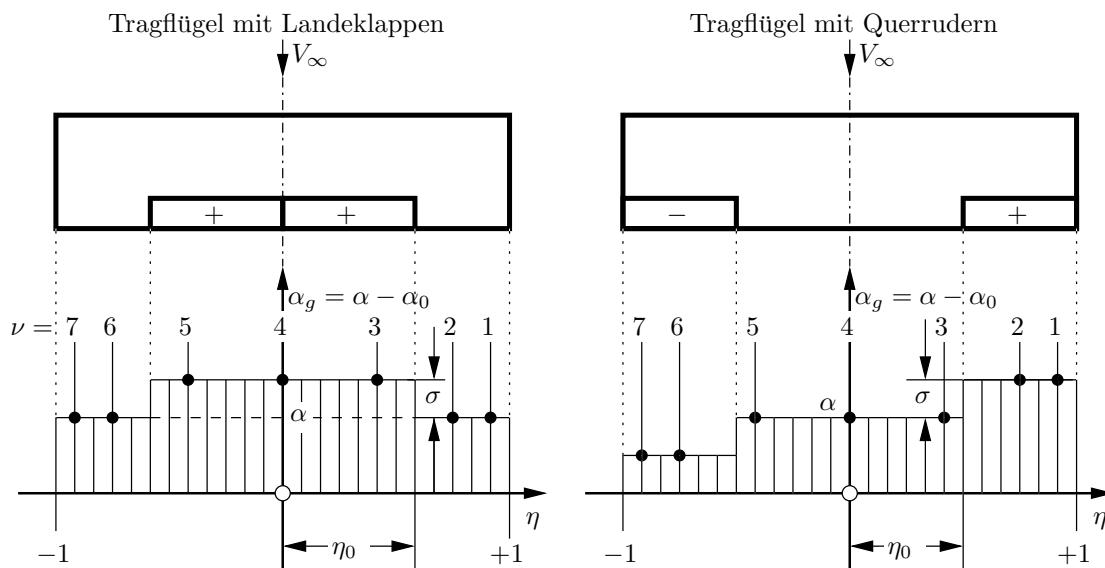
Ein Tragflügel mit Klappen kann prinzipiell wie ein gewölbter Flügel behandelt werden. Das Klappenprofil wird dabei durch eine ebene Platte ersetzt, die in der Nullauftriebsrichtung des Klappenprofils angeordnet wird. Die Wirbeldichtenverteilung ist dann gleich derjenigen der angestellten ebenen Platte unter dem Winkel $\alpha_g = \alpha - \alpha_0$ zuzüglich der Nullverteilung des Klappenprofils.

Der für eine Klappenberechnung notwendige Nullauftriebswinkel α_{0v} im Klappenbereich kann aus einem Profilkatalog entnommen werden. Es können auch die Ergebnisse der Profiltheorie für eine geknickte Platte [4] zu Grunde gelegt werden:

$$\alpha_{0\nu} = -\frac{2}{\pi} \left(\arcsin \sqrt{\lambda_{K\nu}} + \sqrt{\lambda_{K\nu}(1-\lambda_{K\nu})} \right) \eta_{K\nu} \quad .$$



Klappen erstrecken sich meist nur über einen Teil der Spannweite eines Tragflügels. Beispiele sind (+ Ausschlag nach unten):



Am jeweiligen Klappenbeginn bei $\eta = \eta_0$ springt die Verteilung des geometrischen Anstellwinkels um σ . Die Berechnung der Zirkulationsverteilung kann nun folgendermaßen vorgenommen werden:

- Ohne Abspalten des Sprunges in der Anstellwinkelverteilung. In diesem Fall werden die in den Multhopp-Schnitten vorhandenen örtlichen geometrischen Anstellwinkel

$\alpha_{g\nu}$ eingesetzt. Diese Vorgehensweise ist als Näherung zu betrachten. Nachteil ist, dass der Sprung in der Anstellwinkelverteilung nur unvollkommen erfasst wird. Für alle Klappenanfänge η_0 , die zwischen zwei Berechnungsschnitten liegen, erhält man dasselbe Ergebnis.

- Mit Abspalten des Sprunges in der Anstellwinkelverteilung. Es gibt stetige $\gamma_S(\eta)$ -Verteilungen, die Verteilungen des induzierten Anstellwinkels $\alpha_{is}(\eta)$ hervorrufen, die einen Sprung σ an einer Stelle η_0 aufweisen. Man kann daher die Zirkulationsverteilung

$$\gamma(\eta) = \gamma_S(\eta) + \gamma_R(\eta)$$

und den induzierten Anstellwinkel

$$\alpha_i(\eta) = \alpha_{is} + \alpha_{iR}$$

aufspalten, wobei R jeweils den Rest kennzeichnet. Setzt man diese Aufspaltung in die Gleichung für die Zirkulationsverteilung ein, so folgt

$$\frac{b\gamma_S(\eta)}{\pi l(\eta)} + \frac{b\gamma_R(\eta)}{\pi l(\eta)} + \alpha_{is}(\eta) + \alpha_{iR}(\eta) = \alpha_g(\eta)$$

oder auch

$$\frac{b\gamma_R(\eta)}{\pi l(\eta)} + \alpha_{iR}(\eta) = \underbrace{\underbrace{\alpha_g(\eta)}_{\substack{\text{Sprung } \sigma \text{ bei } \eta_0 \\ \text{stetig}}} - \underbrace{\underbrace{\alpha_{is}(\eta)}_{\substack{\text{Sprung } \sigma \text{ bei } \eta_0 \\ \text{stetig}}} - \underbrace{\underbrace{\frac{b\gamma_S(\eta)}{\pi l(\eta)}}_{\substack{\text{stetig}}}}}_{\substack{\text{stetig}}} = \underbrace{\alpha_R(\eta)}_{\substack{\text{stetig}}} .$$

Besitzt die Anstellwinkelverteilung $\alpha_g(\eta)$ bei η_0 einen Sprung σ , so spaltet man eine stetige γ_S -Verteilung ab, die an der Stelle η_0 ebenfalls einen Sprung σ besitzt. In diesem Fall hebt sich der Sprung σ heraus und die ganze rechte Seite $\alpha_R(\eta)$ ist stetig.

Bei den stetigen Funktionen $\gamma_S(\eta)$, die Funktionen $\alpha_{is}(\eta)$ mit Sprung σ bei $\eta_0 = \cos \vartheta_0$ hervorrufen, sind der Fall eines symmetrischen und eines antimetrischen Klappenausschlages zu unterscheiden. Die folgenden Abbildungen zeigen für

$$\begin{aligned} \gamma_S &= \gamma_K \quad \text{Landeklappenfall, symmetrisch} \\ \gamma_S &= \gamma_Q \quad \text{Querruderfall, antimetrisch} \end{aligned}$$

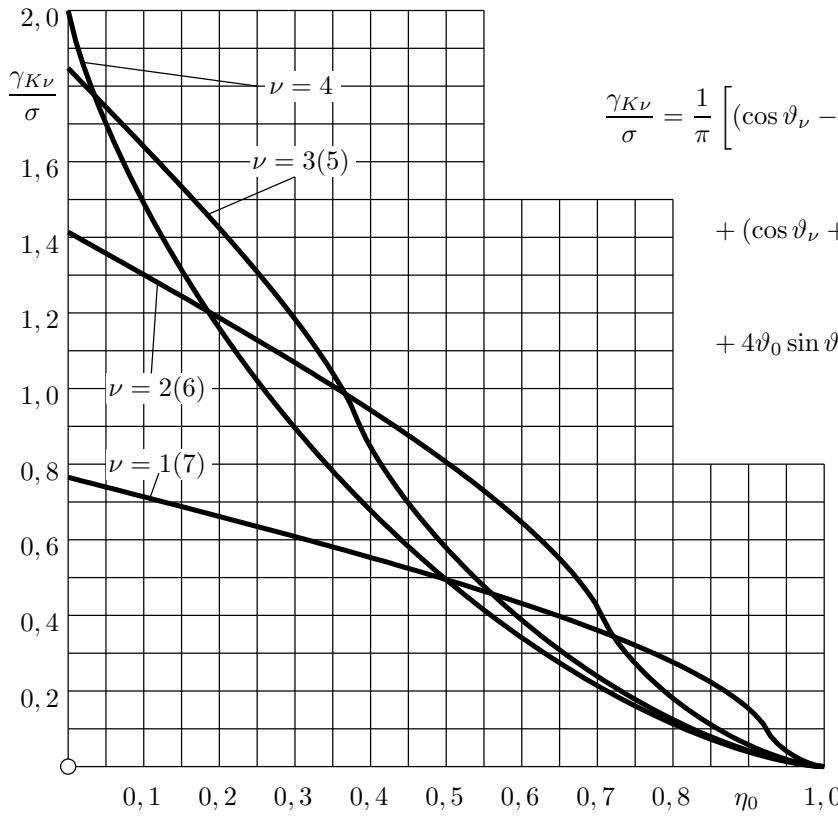
die Funktionen $\gamma_S(\eta)$ und $\alpha_i(\eta)$ und Auftragungen der Werte γ_S/σ für verschiedene $\eta_0 = \cos \vartheta_0$ ($M = 7$).

Aus diesen Abbildungen kann man für gegebenes η_0 die Werte $\frac{\gamma_K}{\sigma}$ und $\frac{\gamma_Q}{\sigma}$ berechnen oder den Auftragungen entnehmen. Für bekannte Sprunggröße σ sind dann die Funktionen $\gamma_S = \gamma_K$ bzw. $\gamma_S = \gamma_Q$ bekannt. Man löst dann das alte lineare Gleichungssystem für die

neue, stetige rechte Seite $\alpha_R(\eta)$ und erhält als Lösung γ_R . Die Zirkulationsverteilung für den Flügel mit Klappen ist dann

$$\gamma(\eta) = \gamma_K(\eta) + \gamma_R(\eta) \quad \text{bzw.} \quad \gamma(\eta) = \gamma_Q(\eta) + \gamma_R(\eta) \quad .$$

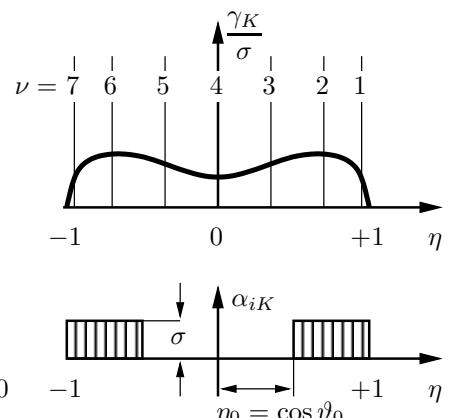
Klappenausschlag symmetrisch



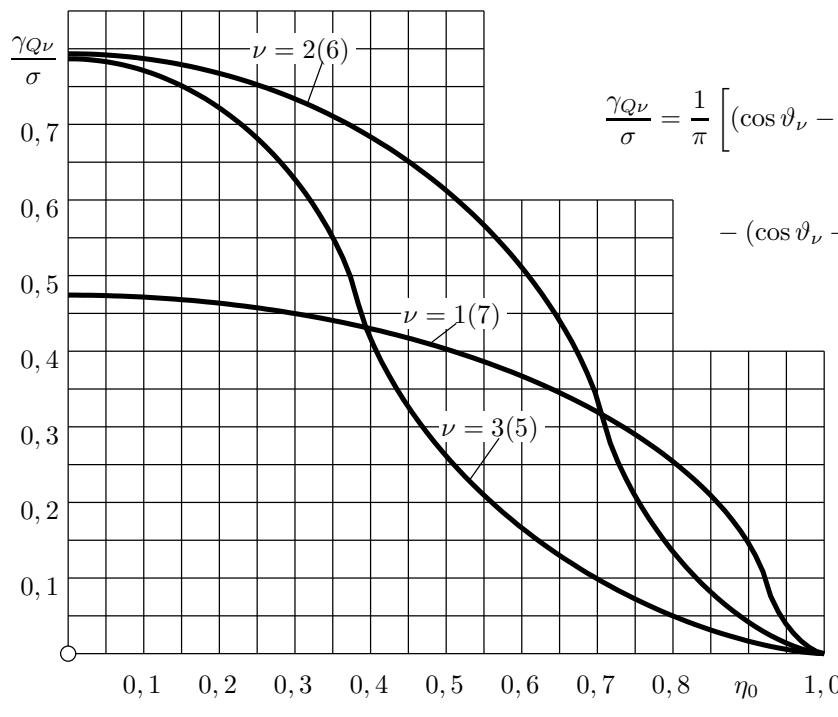
$$\frac{\gamma_{K\nu}}{\sigma} = \frac{1}{\pi} \left[(\cos \vartheta_\nu - \cos \vartheta_0) \ln \frac{1 - \cos(\vartheta_\nu + \vartheta_0)}{1 - \cos(\vartheta_\nu - \vartheta_0)} + \right.$$

$$+ (\cos \vartheta_\nu + \cos \vartheta_0) \ln \frac{1 + \cos(\vartheta_\nu + \vartheta_0)}{1 + \cos(\vartheta_\nu - \vartheta_0)} +$$

$$+ 4\vartheta_0 \sin \vartheta_\nu \right]$$

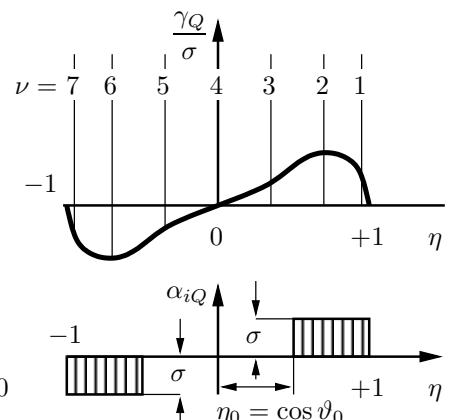


Klappenausschlag antimetrisch



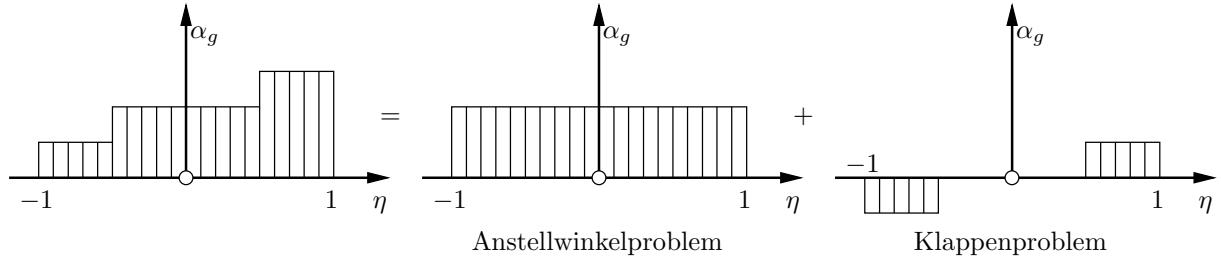
$$\frac{\gamma_{Q\nu}}{\sigma} = \frac{1}{\pi} \left[(\cos \vartheta_\nu - \cos \vartheta_0) \ln \frac{1 - \cos(\vartheta_\nu + \vartheta_0)}{1 - \cos(\vartheta_\nu - \vartheta_0)} - \right.$$

$$- (\cos \vartheta_\nu + \cos \vartheta_0) \ln \frac{1 + \cos(\vartheta_\nu + \vartheta_0)}{1 + \cos(\vartheta_\nu - \vartheta_0)} \right]$$

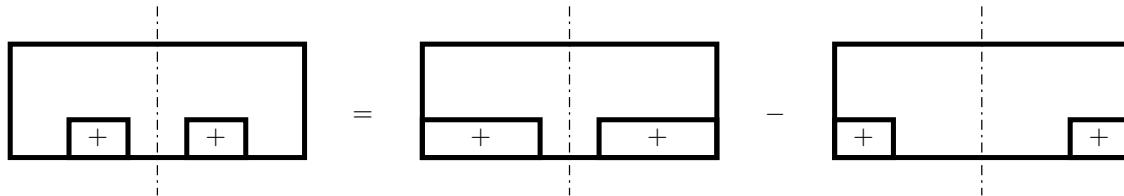


Funktionen $\gamma_S = \gamma_K$ und $\gamma_S = \gamma_Q$ zum Abspalten von Sprungstellen ($\sigma, \eta_0 = \cos \vartheta_0$) bei Klappenflügeln ($M = 7$).

Bei der praktischen Rechnung kann man wegen der Linearität der Prandtl'schen Integralgleichung und des daraus folgenden Gleichungssystems das Anstellwinkelproblem vom Klappenproblem trennen. Es sind dann zwei Rechnungen durchzuführen.



Oftmals reicht die Klappe nicht bis zum Flügelende, insbesondere bei Landeklappen. In solchen Fällen müssen 2 Sprünge abgespalten werden:



Die tatsächliche Klappenanordnung ergibt sich aus der Differenz zweier bis zum Flügelende reichenden Klappensysteme.

2.4.6 Einige Ergebnisse

Mit Hilfe des hier entwickelten Verfahrens lässt sich die Zirkulationsverteilung für Flügel großer Streckung berechnen. Sie stellt die Grundlage dar für die Ermittlung

- der Belastungen der Struktur (Lastannahmen)
- des induzierten Widerstandes
- des Abreißverhaltens des Flügels
- des Abwindes am Ort eines Leitwerkes.

Aus der Beziehung für den örtlichen Auftriebsbeiwert

$$c_a(\eta) = \frac{2 b \gamma(\eta)}{l(\eta)}$$

folgt

$$\gamma(\eta) \sim c_a(\eta) l(\eta) \sim \frac{dA}{dy}(\eta) \quad .$$

Dies bedeutet: Die Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta)$ und die Verteilung des örtlichen Auftriebsbeiwertes $c_a(\eta)$ hängen über den Grundriss miteinander zusammen. Nur beim Rechteckflügel $l = \text{const.}$ ist $\gamma(\eta) \sim c_a(\eta)$. Die Auftriebsverteilung (Lastverteilung) $\frac{dA}{dy}(\eta)$ ist der Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta)$ proportional.

Die Zirkulationsverteilung hängt ab von

- Grundrissform

Parameter: Streckung Λ , Zuspitzung λ , Grundriss $l(\eta)$

Dieser Anteil ist linear vom Anstellwinkel α abhängig.

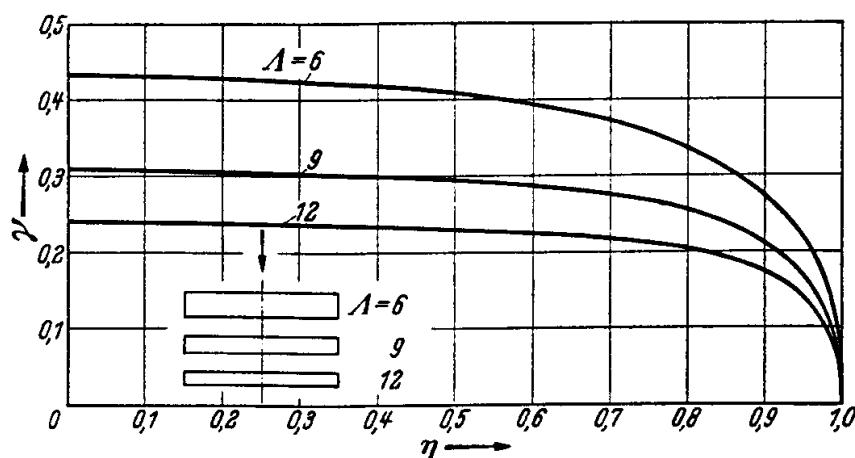
- Wölbung und Verwindung

Profile, geometrische und aerodynamische Verwindung, Klappen

Dieser Anteil ist unabhängig vom Anstellwinkel α .

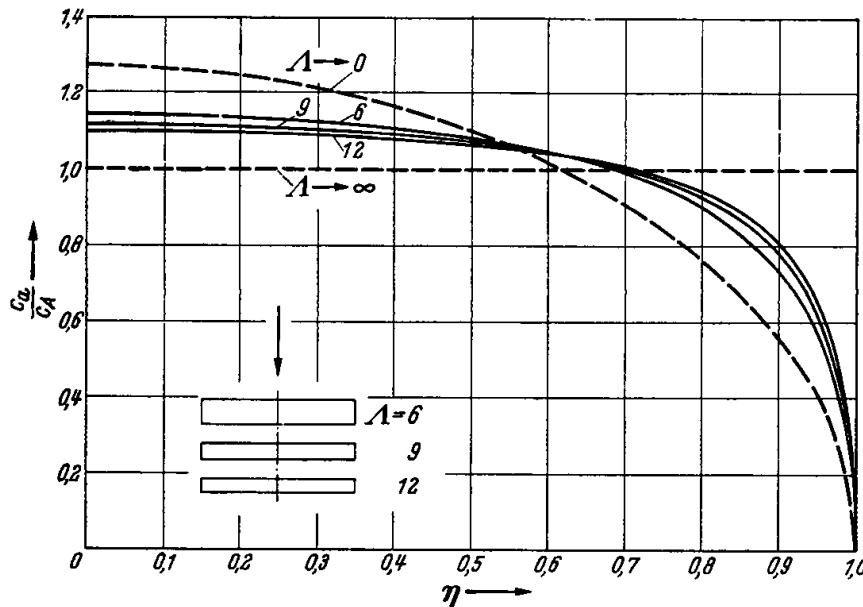
Im Folgenden sollen nun einige typische Ergebnisse dargestellt werden.

Grundrisseneinfluss. Für Rechteckflügel mit verschiedenen Streckungen ergeben sich die dargestellten Zirkulationsverteilungen $\gamma(\eta)$ für $\hat{\alpha} = 1$.



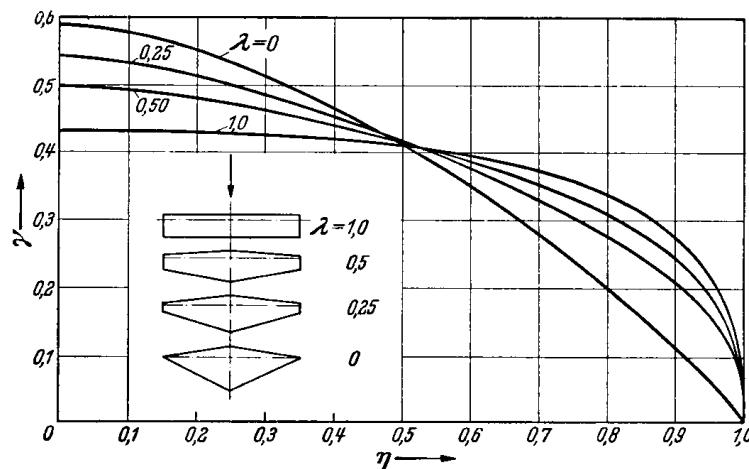
Zirkulationsverteilung γ von unverwundenen Rechteckflügeln ($\hat{\alpha} = 1$)
mit den Seitenverhältnissen $\Lambda = 6, 9, 12$; $(dc_A/d\alpha)_\infty = 2\pi$.

Geht man zur Verteilung des örtlichen Auftriebsbeiwertes $c_a(\eta)$ ($\sim \gamma(\eta)$ für Rechteckflügel) über und bezieht man auf c_A , so ist das Ergebnis unabhängig vom Anstellwinkel α . Mit wachsender Flügelstreckung wird die c_a - Verteilung von Rechteckflügeln immer volliger und im Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ erhält man die konstante Verteilung des 2D-Problems. Für $\Lambda \rightarrow 0$ ergibt sich wie besprochen die elliptische Verteilung.



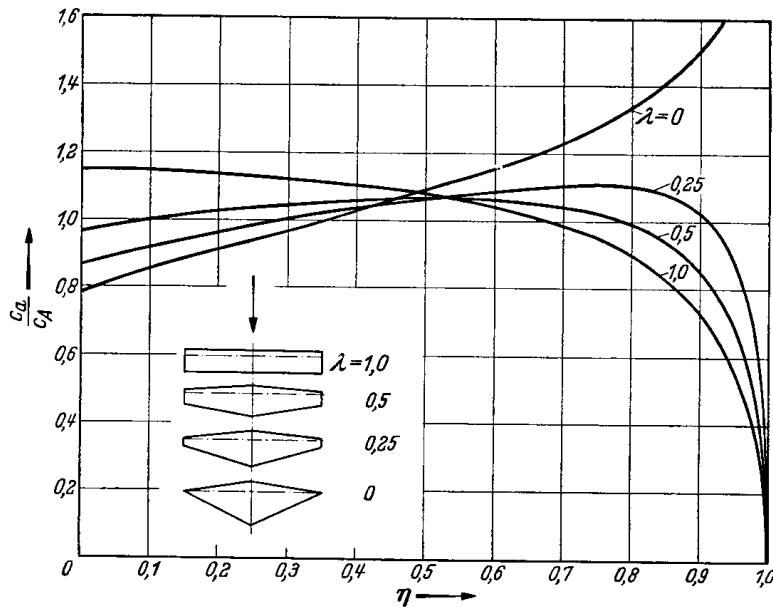
Verteilung des örtlichen Auftriebsbeiwertes c_a/c_A von unverwundenen Rechteckflügeln mit den Seitenverhältnissen $\Lambda = 6, 9, 12$ sowie Grenzkurven für $\Lambda \rightarrow 0$ und $\Lambda \rightarrow \infty$, $(dc_A/d\alpha)_\infty = 2\pi$.

Trapezflügel bieten bei der Anwendung strukturelle Vorteile. Die Zirkulationsverteilungen zugespitzter Flügel mit konstantem Seitenverhältnis $\Lambda = 6$ zeigen für abnehmenden Parameter $\lambda = l_a/l_i$ eine starke Abnahme der Zirkulation im Außenbereich und eine Konzentration im Innenbereich.



Zirkulationsverteilung γ für unverwundene Trapezflügel mit der Zuspitzung $\lambda = 0, 1/4, 1/2, 1$; Seitenverhältnis $\Lambda = 6$; $(dc_A/d\alpha)_\infty = 2\pi$.

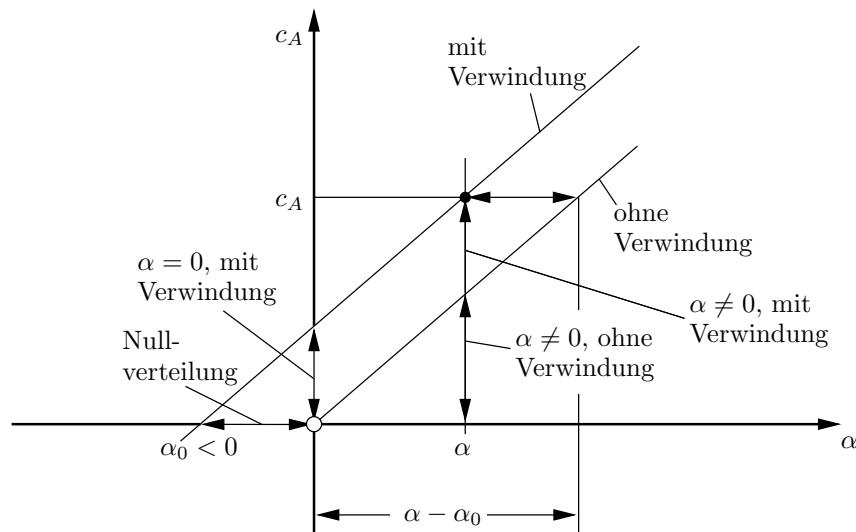
Geht man zu c_a -Verteilungen über, so sind diese im vorliegenden Fall wegen $l(\eta)$ nicht mehr proportional zur Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta)$. Man erhält c_a -Verteilungen mit einem Maximum des örtlichen Auftriebsbeiwertes im Außenbereich des Flügels. Je stärker ein



Verteilung des örtlichen Auftriebsbeiwertes c_a/c_A längs Spannweite für unverwundene Trapezflügel der Zuspitzung $\lambda = 0, 1/4, 1/2, 1$; Seitenverhältnis $\Lambda = 6$; $(dc_A/d\alpha)_\infty = 2\pi$.

Trapezflügel zugespitzt ist, desto größer sind die im Außenbereich erreichten örtlichen c_a -Werte und desto größer ist dort die Gefahr des Abreißens der Strömung im Langsamflug. Dieses Abreißen der Strömung im Außenbereich des Flügels ist besonders deshalb unerwünscht, weil sich dort die Querruder befinden, so dass mit dem Auftriebsverlust auch eine Beeinträchtigung der Steuerbarkeit verbunden ist. Diese Nachteile können durch Verwindung sowie durch Maßnahmen zur Verhinderung des Abreißens der Strömung im Langsamflug (Vorflügel, Slats) gemildert oder ganz beseitigt werden.

Einfluss der Verwindung. Wegen der Linearität der Prandtl'schen Integralgleichung bezüglich des Anstellwinkels α



setzt sich die Zirkulationsverteilung eines verwundenen Flügels additiv zusammen aus derjenigen des angestellten, unverwundenen Flügels (linear abhängig von α) und der des nicht angestellten, verwundenen Flügels (unabhängig von α). Die Auftriebskurve des verwundenen Flügels ist gegenüber der des unverwundenen Flügels parallel verschoben. Zur Ermittlung der Zirkulationsverteilung und des Auftriebsverlaufs eines verwundenen Flügels sind also stets zwei Rechnungen durchzuführen, nämlich

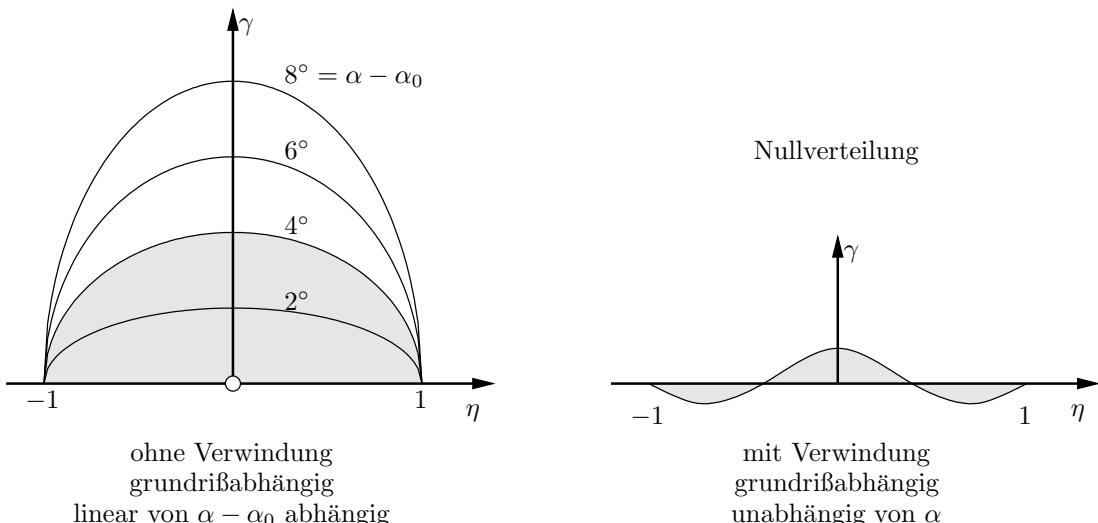
- ohne Verwindung mit Anstellwinkel α (z.B. $\hat{\alpha} = 1$)
Ermittlung der Anstellwinkelabhängigkeit für den vorgegebenen Grundriss
- mit Verwindung ohne Anstellwinkel ($\alpha = 0$) oder bei einem beliebigen Anstellwinkel $\alpha = \text{const.}$ Berechnung der Zirkulationsverteilung in einem Punkt der verschobenen $c_A(\alpha)$ - Kurve des verwundenen Flügels.

Aus der Parallelverschiebung kann dann der Nullauftriebswinkel α_0 bestimmt werden.

Mit diesen Ergebnissen lässt sich die Zirkulationsverteilung eines angestellten, verwundenen Flügels auch zusammensetzen aus der

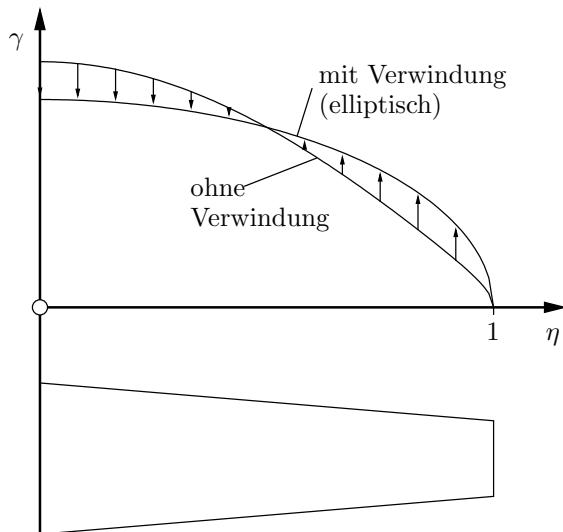
- Zirkulationsverteilung beim Anstellwinkel $\alpha - \alpha_0$, die vom Grundriss abhängig ist und linear vom Anstellwinkel $\alpha - \alpha_0$ abhängig ist, und aus der
- Nullverteilung des verwundenen Flügels bei $\alpha = \alpha_0$ und $c_A = 0$. Diese Zirkulationsverteilung hängt nicht vom Anstellwinkel, sondern nur vom Grundriss und von der Verwindung ab. Sie liefert keinen Beitrag zum Auftrieb.

Diese beiden Zirkulationsverteilungen sind nachfolgend schematisch dargestellt. (Die hinterlegten Verteilungen gehören zu dem im $c_A(\alpha)$ - Diagramm eingetragenen Punkt, Beispiel $\alpha - \alpha_0 = 4^\circ$)

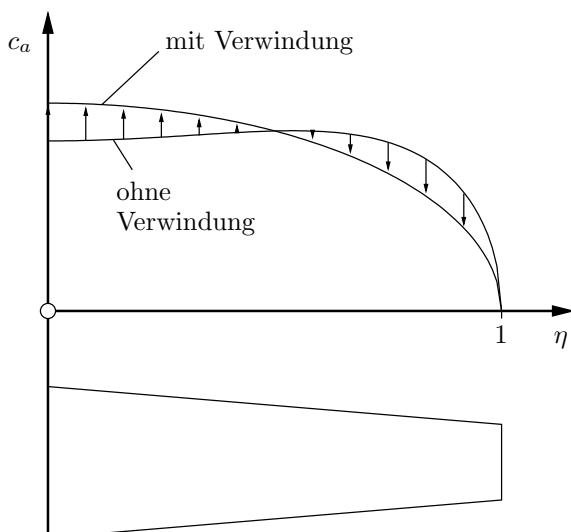


Eine Verwindung erfüllt folgende Aufgaben:

- Bei nichtelliptischem Grundriss ist bei einem unverwundenen Tragflügel die Zirkulationsverteilung ebenfalls nicht elliptisch. Durch Verwindung kann für einen c_A -Wert (Reiseflug) eine elliptische Zirkulationsverteilung und damit ein minimaler induzierter Widerstand bewirkt werden.
- Durch geeignete Wahl der Nullverteilung kann das Abreißverhalten im Langsamflug beeinflusst werden



Beispiel 1: Verwindung zur Erzeugung einer elliptischen Zirkulationsverteilung. Trapezflügel mit mäßiger Zuspitzung: In den Außenschnitten muss der örtliche Anstellwinkel erhöht werden.



Beispiel 2: Verwindung zur Verbesserung des Abreißverhaltens. Trapezflügel mit mäßiger Zuspitzung: In den Außenschnitten muss der örtliche Anstellwinkel reduziert werden.

Aus den gezeigten Beispielen ergibt sich, dass sich beide Forderungen mit einer Verwindung nicht erfüllen lassen. Daher sind beim Entwurf von Tragflügeln Kompromisse einzugehen, die je nach Aufgabenstellung zu unterschiedlichen Lösungen führen.

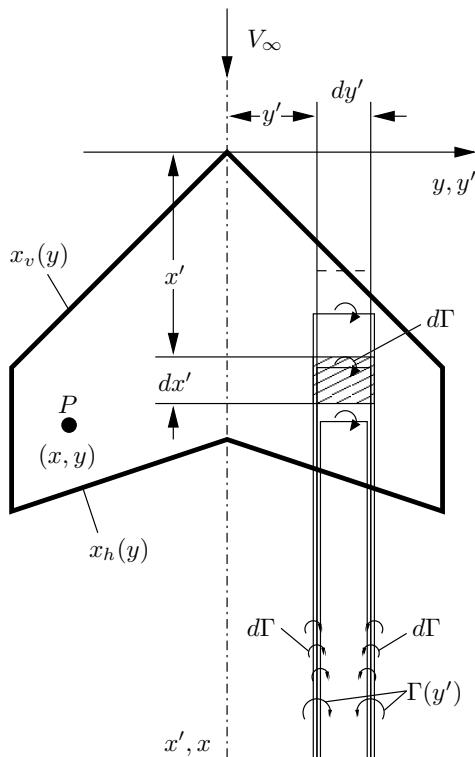
2.5 Der Pfeilflügel beliebiger Streckung

Die bisherige Theorie galt nur für

- Flügel großer Streckung. In diesem Fall ist die Aufspaltung $\alpha_g = \alpha_e + \alpha_i$ möglich. Für kleine Streckungen sind die getroffenen Näherungen nicht mehr zulässig.
- Ungepfeilte Flügel. Auch bei gepfeilten Flügeln lässt sich α_i berechnen. Das zugehörige 2D Problem (Anstellwinkel α_e) ändert sich jedoch stark, insbesondere in der Umgebung des Mittelschnittes und im Außenbereich des Flügels.

In einer weiterführenden Theorie, die allgemeiner anwendbar ist, muss daher eine flächenhafte Wirbeldichtenverteilung $k(x', y')$ zu Grunde gelegt und insbesondere auch die x -Abhängigkeit berücksichtigt werden. Dabei soll aber weiterhin ein ebenes Wirbelsystem in der Ebene $z = 0$ zu Grunde gelegt werden. Bei der Anwendung auf Flügel mit kleiner Streckung bedeutet dies, dass das Aufrollen der Wirbelschicht nicht berücksichtigt wird, so dass weiterhin eine lineare Tragflügeltheorie vorliegt.

2.5.1 Die Grundgleichung der Tragflächentheorie



Im Folgenden wird ein ebenes Wirbelsystem in der Flügelebene $z = 0$ mit einer flächenhaften Wirbeldichtenverteilung $k(x', y')$ auf dem Tragflügel zu Grunde gelegt. Der Flügel wird in Streifen dy' eingeteilt. Dies sind die Elementarflügel. Jeder von ihnen ist in Tiefenrichtung ebenfalls in Streifen dx' eingeteilt. Auf jedem Flächenelement $dx'dy'$ sitzt ein tragender Wirbel der Stärke

$$d\Gamma = k(x', y') dx',$$

der sich an beiden Seiten in Form von nichttragenden Wirbeln gleicher Stärke nach hinten bis ins Unendliche fortsetzt (Hufeisenwirbel). Jeder Elementarflügel dy' wird also durch ein System von Hufeisenwirbeln (Wirbelleitern) repräsentiert. Die Gesamtzirkulation im Schnitt $y' = \text{const.}$ ist

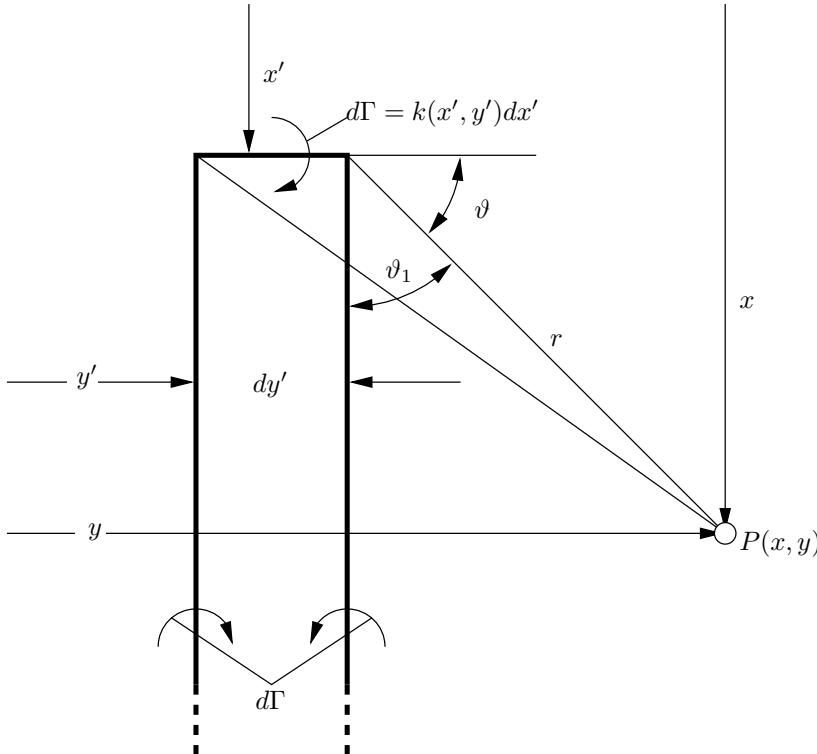
$$\Gamma(y') = \int_{x_v(y')}^{x_h(y')} k(x', y') dx' .$$

Dies ist auch die Gesamtstärke der dem Elementarflügel zuzuordnenden freien Wirbel. Da sich die Zirkulation zweier benachbarter Elementarflügel nur um $d\Gamma = \Gamma(y' + dy') - \Gamma(y')$ unterscheidet, geht also von jedem Elementarflügel die Zirkulation $d\Gamma = (d\Gamma/dy')dy'$ in der freien Wirbelschicht nach hinten ab. Dies stimmt mit der früheren Darstellung auf S. 62/63 überein.

Die Wirbeldichtenverteilung $k(x', y')$ wird aus der kinematischen Strömungsbedingung berechnet. Diese lautet beim Auftriebsproblem für eine Skelettfläche $z^{(s)}(x', y')$ mit kleiner relativer Wölbung und bei kleinem Anstellwinkel α gegen die Ebene $z = 0$

$$\alpha - \frac{\partial z^{(s)}}{\partial x} = -\frac{w}{V_\infty} .$$

Darin ist w die von dem gesamten Wirbelsystem im Aufpunkt $P(x, y)$ induzierte Störgeschwindigkeit in z -Richtung. Sie berechnet sich mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes wie folgt:



Induzierende Seite:
Hufeisenwirbel
der Stärke $d\Gamma$
an der Stelle
 $x', y', z' = 0$.
Aufpunkt:
 $P(x, y)$ in der
Belegungsebene
 $z = 0$ an der
Stelle
 $x, y, z = 0$.

Der Beitrag des tragenden Wirbelstücks zum Aufwind in $P(x, y)$ ist nach dem Biot-Savart'schen Gesetz (siehe Vorlesung Strömungsmechanik II)

$$d^2w = -\frac{d\Gamma \sin \vartheta}{4\pi r^2} dy' = -\frac{d\Gamma}{4\pi} \frac{x - x'}{r^3} dy'$$

mit

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Der Beitrag des rechten nichttragenden Wirbels zum Aufwind in $P(x, y)$ ergibt sich aus dem Biot-Savart'schen Gesetz zu

$$dw = \frac{d\Gamma}{4\pi} \frac{1}{y - y'} (1 + \cos \vartheta_1) = \frac{d\Gamma}{4\pi} \frac{1}{y - y'} \left(1 + \frac{x - x'}{r} \right) .$$

Der linke nichttragende Wirbel induziert eine entgegengesetzte Geschwindigkeit, die aber etwas kleiner ist, weil sein Abstand vom Aufpunkt um dy' größer ist. Es bleibt also effektiv eine induzierte Geschwindigkeit des nichttragenden Wirbelpaares übrig, die sich aus dem Gradienten $\frac{d(dw)}{dy'}$ und der Streifenbreite dy' zu

$$d^2w = \frac{d}{dy'} (dw) dy'$$

ergibt. Mit

$$\frac{d(dw)}{dy'} = \frac{d\Gamma}{4\pi} \left[\frac{1}{(y - y')^2} \left(1 + \frac{x - x'}{r} \right) + \frac{1}{y - y'} \frac{(x - x')2(y - y')}{2rr^2} \right]$$

folgt dann für den Beitrag des Wirbelpaares

$$d^2w = \frac{d\Gamma}{4\pi} \left[\frac{1}{(y - y')^2} \left(1 + \frac{x - x'}{r} \right) + \frac{x - x'}{r^3} \right] dy' .$$

Die Induktion des ganzen Hufeisenwirbels der Stärke $d\Gamma = k(x', y') dx'$ ist damit

$$d^2w = \frac{k(x', y')}{4\pi} \frac{1}{(y - y')^2} \left(1 + \frac{x - x'}{r} \right) dx' dy' ,$$

und für die Gesamtinduktion aller Hufeisenwirbel ergibt sich durch Integration über die Flügelfläche

$$w(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{-s}^{+s} \frac{1}{(y - y')^2} \int_{x_v(y')}^{x_h(y')} k(x', y') \left(1 + \frac{x - x'}{r} \right) dx' dy' .$$

Führt man hier eine partielle Integration in Spannweitenrichtung unter Beachtung des Cauchy'schen Hauptwertes durch, so ergibt sich (ohne Herleitung)

$$w(x, y, 0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-s}^{+s} \frac{1}{y - y'} \frac{d}{dy'} \int_{x_v(y')}^{x_h(y')} k(x', y') \left(1 + \frac{x - x'}{r} \right) dx' dy' .$$

Setzt man dieses Ergebnis schließlich in die kinematische Strömungsbedingung ein, so folgt

$$\alpha - \frac{\partial z^{(s)}}{\partial x} = \frac{1}{4\pi V_\infty} \oint_{-s}^{+s} \frac{1}{y - y'} \frac{d}{dy'} \int_{x_v(y')}^{x_h(y')} k(x', y') \left(1 + \frac{x - x'}{r} \right) dx' dy'$$

mit

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Dies ist die Grundgleichung der Tragflächentheorie. Der Integrand ist bei $y' = y$ singulär, so dass wieder der Cauchy'sche Hauptwert zu bilden ist. Die Gleichung gilt für ein ebenes Wirbelsystem in der Flügelebene $z = 0$ sowie für kleine relative Wölbungen und für kleine Anstellwinkel α . Nebenbedingungen für die Wirbeldichtenverteilung $k(x', y')$ sind

Seitenkante: $k(x', y' = \pm s) = 0$

Hinterkante: $k(x'_h, y') = 0$. Dies ist die Kutta'sche Abflussbedingung.

Die Grundgleichung der Tragflächentheorie stellt einen Zusammenhang her zwischen der Flügelgeometrie $z^{(s)}(x, y)$ und der Anströmung α einerseits und der flächenhaften Wirbeldichtenverteilung $k(x', y')$ andererseits. Bei der

– **Entwurfsaufgabe** ist

gegeben: $k(x', y')$ durch die Druckverteilung in der Form

$$c_p = -2 \frac{u}{V_\infty} = \mp \frac{k(x', y')}{V_\infty}, \quad \begin{array}{ll} - & \text{oben} \\ + & \text{unten} \end{array}$$

$$\text{denn es gilt} \quad u = \pm \frac{k}{2}, \quad \begin{array}{ll} + & \text{oben} \\ - & \text{unten} \end{array}$$

gesucht: Flügelgeometrie $z^{(s)}(x, y)$ und Anstellwinkel α

– **Nachrechnungsaufgabe** ist

gegeben: Flügelgeometrie $z^{(s)}(x, y)$ und Anstellwinkel α

gesucht: Wirbeldichtenverteilung $k(x', y')$

Daraus folgt dann wie oben die Druckverteilung und damit weiter

Gesamtauftriebsbeiwert

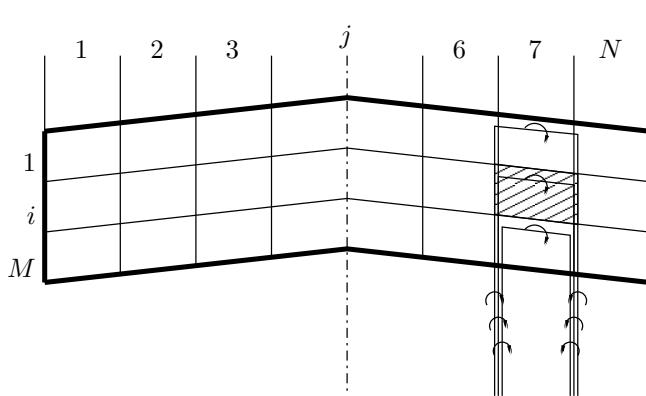
$$c_A = \frac{1}{S} \iint_{(S)} \Delta c_p \, dx \, dy = \frac{2}{S} \iint_{(S)} \frac{k(x, y)}{V_\infty} \, dx \, dy \quad .$$

Gesamtnickmomentenbeiwert

$$c_{M_{Nase}} = -\frac{2}{Sl_\mu} \iint_{(S)} \frac{k(x, y)}{V_\infty} x \, dx \, dy \quad .$$

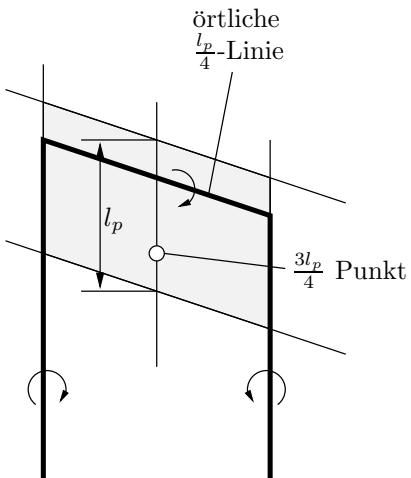
Die Integralgleichung der Tragflächentheorie lässt sich in allgemeiner Form nicht lösen. Es existieren nur Näherungsverfahren. Für Flügel großer Streckung kann man aus der Integralgleichung der Tragflächentheorie in einem langwierigen Prozess mit entsprechenden Annahmen die Prandtl'sche Integralgleichung herleiten. Für Flügel sehr kleiner Streckung sind ebenfalls Vereinfachungen möglich, die zur Theorie schlanker Körper führen. Die Grenzfälle sind jeweils sehr einfacher zu behandeln als die Lösung der vollständigen Integralgleichung.

2.5.2 Das Wirbelleiterverfahren



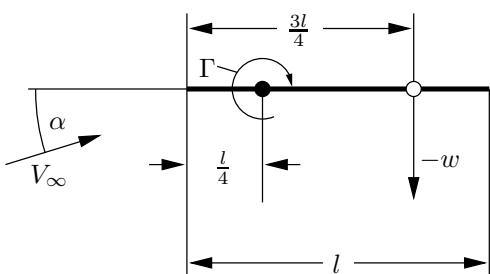
Bei der Tragflächentheorie war jeder Elementarflügel mit einer in Tiefenrichtung kontinuierlichen Wirbeldichtenverteilung $k(x', y')$ belegt worden. Man kann nun aber auch jeden Elementarflügel mit einer gewissen Anzahl diskreter Wirbel belegen. Dadurch entsteht für jeden Elementarflügel eine Wirbelleiter. Die Stärke dieser einzelnen Wirbel ist dann zu bestimmen. Bei M Flächenelementen in Tiefenrichtung und N Elementarflügeln in Spannweitenrichtung hat man $M \times N$ unbekannte Zirkulationswerte Γ .

Bei der Anordnung der Wirbel auf den Flächenelementen unterscheiden sich die Methoden etwas. Üblicherweise wird folgende Konfiguration gewählt:



Auf jedem Flächenelement wird der tragen-de Wirbel in die örtliche $\frac{l_p}{4}$ -Linie gelegt und der Aufpunkt, in dem die kinematische Stömungsbedingung erfüllt wird, befindet sich im $\frac{3l_p}{4}$ -Punkt des Mittelschnittes des Flächenelementes.

Die Begründung für diese Wahl röhrt von dem Grenzfall der 2D–Strömung (Theorem von Pistolesi).



Bei einer angestellten ebenen Platte verläuft die Wirbeldichte in Tiefenrichtung entsprechend der 1. Birnbaum'schen Verteilung. Deren Schwerpunkt ist der $l/4$ -Punkt. Ordnet man dort einen Einzelwirbel der Stärke Γ an, so lässt sich die kinematische Strömungsbedingung nur noch in einem Punkt erfüllen.

Wählt man diesen im $3l/4$ -Punkt, so wird dort die Geschwindigkeit

$$-w = \frac{\Gamma}{2\pi \frac{l}{2}} = \frac{\Gamma}{\pi l}$$

induziert, und aus der kinematischen Strömungsbedingung folgt

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma}{\pi l V_\infty} \\ \Gamma &= \pi l V_\infty \alpha.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Auftrieb

$$\begin{aligned}A &= \varrho b V_\infty \Gamma = \varrho b V_\infty^2 l \pi \alpha \\ A &= 2\pi \alpha \frac{\varrho}{2} V_\infty^2 b l\end{aligned}$$

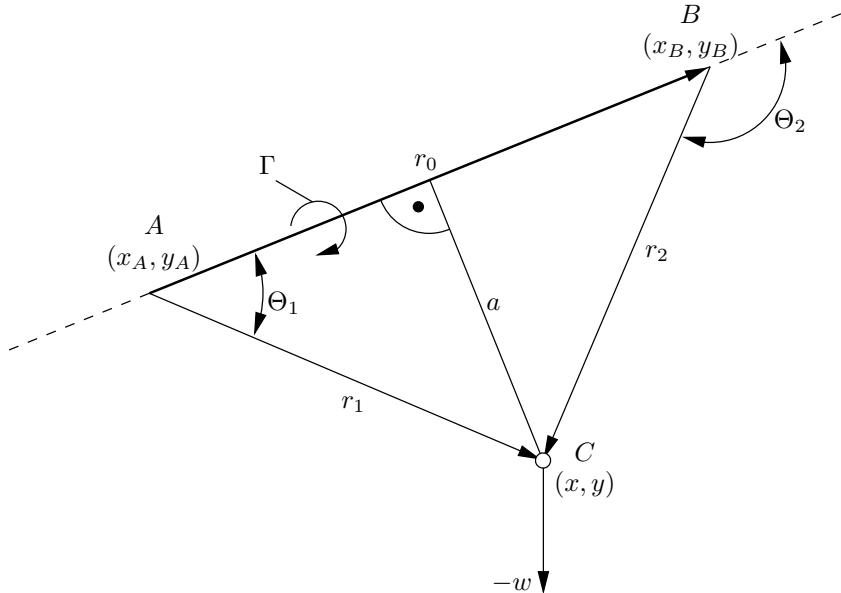
und

$$c_a = \frac{A}{\frac{\varrho}{2} V_\infty^2 b l} = 2\pi \alpha .$$

Dieser stimmt mit dem Ergebnis der Skelett-Theorie für schlanke Profile überein.

Zur Bestimmung der $M \times N$ Unbekannten Wirbelstärken Γ wird die kinematische Strömungsbedingung in den $M \times N$ Aufpunkten erfüllt, und man hat ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

Die Ermittlung der induzierten Geschwindigkeiten in den Aufpunkten erfolgt nach dem Biot-Savart'schen Gesetz:



Ein Wirbelstück AB induziert in einem Aufpunkt C die Geschwindigkeit

$$-w = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

senkrecht zu der Ebene ABC . Für die Ortsvektoren gilt

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix},$$

und die weiteren geometrischen Größen sind

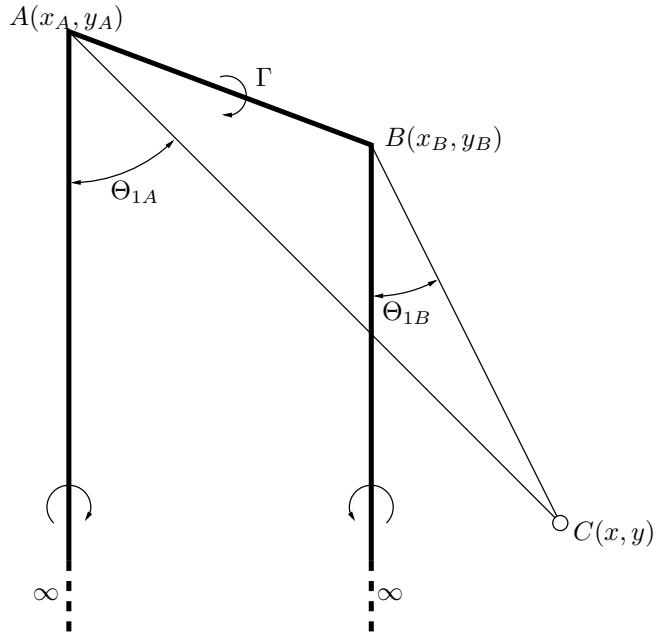
$$a = \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{r_0}; \quad \cos \theta_1 = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{r_0 r_1}; \quad \cos \theta_2 = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{r_0 r_2}.$$

Damit ist

$$-w = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} \left(\frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{r_1} - \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{r_2} \right).$$

$-w$	Abwind
$+w$	Aufwind

Im Folgenden wird mit diesem Ergebnis die Induktion eines allgemeinen Hufeisenwirbels berechnet. Dabei ist:



Beitrag des Wirbelstücks AB :

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| &= |(x - x_A)(y - y_B) - (x - x_B)(y - y_A)| \\ \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{r_1} &= \frac{(x_B - x_A)(x - x_A) + (y_B - y_A)(y - y_A)}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} \\ \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{r_2} &= \frac{(x_B - x_A)(x - x_B) + (y_B - y_A)(y - y_B)}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 -w_{AB} = & \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{|(x-x_A)(y-y_B) - (x-x_B)(y-y_A)| \operatorname{SIGN}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)} \times \\
 & \times \left[\frac{(x_B - x_A)(x - x_A) + (y_B - y_A)(y - y_A)}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{(x_B - x_A)(x - x_B) + (y_B - y_A)(y - y_B)}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}} \right].
 \end{aligned}$$

Beitrag des Wirbelstücks $A \infty$

$$-w_{A\infty} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{y - y_A} \left[\frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} + 1 \right].$$

Beitrag des Wirbelstücks $B \infty$

$$-w_{B\infty} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{y - y_B} \left[\frac{x - x_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}} + 1 \right].$$

Damit ist die vom Hufeisenwirbel eines induzierenden Flächenelementes n im Aufpunkt des Flächenelementes m induzierte Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
 -w_{mn} = & \frac{\Gamma_n}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|(x_m - x_A)(y_m - y_B) - (x_m - x_B)(y_m - y_A)| \operatorname{SIGN}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)} \times \right. \\
 & \times \left[\frac{(x_B - x_A)(x_m - x_A) + (y_B - y_A)(y_m - y_A)}{\sqrt{(x_m - x_A)^2 + (y_m - y_A)^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{(x_B - x_A)(x_m - x_B) + (y_B - y_A)(y_m - y_B)}{\sqrt{(x_m - x_B)^2 + (y_m - y_B)^2}} \right] + \\
 & + \frac{1}{y_m - y_A} \left[1 + \frac{x_m - x_A}{\sqrt{(x_m - x_A)^2 + (y_m - y_A)^2}} \right] - \\
 & \left. - \frac{1}{y_m - y_B} \left[1 + \frac{x_m - x_B}{\sqrt{(x_m - x_B)^2 + (y_m - y_B)^2}} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

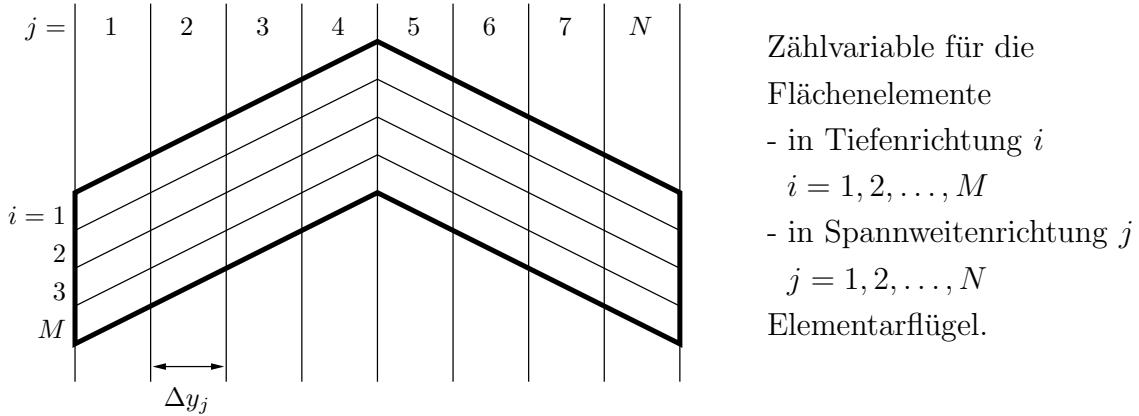
Dabei sind A und B die Eckpunkte des induzierenden Hufeisenwirbels am Flächenelement n . Die von allen induzierenden Hufeisenwirbeln im Aufpunkt des Flächenelementes m induzierte Geschwindigkeit ist dann

$$w_m = \sum_{n=1}^{M \times N} w_{mn} .$$

Damit lautet die kinematische Strömungsbedingung im Aufpunkt an der Stelle m (unverwundener Plattenflügel bei kleinem Anstellwinkel α)

$$-w_m = V_\infty \alpha, \quad m = 1, 2, \dots, M \times N$$

und dies ist dann das lineare Gleichungssystem für die $M \times N$ Unbekannten Γ_n .



Für den Auftrieb eines Elementarflügels j gilt

$$A_j = \rho \Delta y_j V_\infty \sum_{i=1}^M \Gamma_{ij} .$$

Damit ist der örtliche Auftriebsbeiwert

$$c_{a_j} = \frac{A_j}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 l_j \Delta y_j} = \frac{2}{V_\infty l_j} \sum_{i=1}^M \Gamma_{ij},$$

wobei l_j die örtliche Flügeltiefe des Elementarflügels bezeichnet. Der Gesamtauftrieb ist

$$A = \sum_{j=1}^N A_j ,$$

und der zugehörige Auftriebsbeiwert ergibt sich aus

$$c_A = \frac{A}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 S} = \frac{\rho \sum_{j=1}^N \Delta y_j V_\infty \sum_{i=1}^M \Gamma_{ij}}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 S}$$

$$c_A = \frac{2}{V_\infty S} \sum_{j=1}^N \Delta y_j \sum_{i=1}^M \Gamma_{ij}.$$

Mit Hilfe der örtlichen Auftriebskraft am Flächenelement $A_{ij} = \varrho V_\infty \Delta y_j \Gamma_{ij}$ lassen sich Nickmomente um beliebige Bezugssachsen berechnen. Für die Ermittlung des Beiwertes des induzierten Widerstandes

$$c_{w_i} = \Lambda \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) \alpha_i(\eta) d\eta$$

kennt man

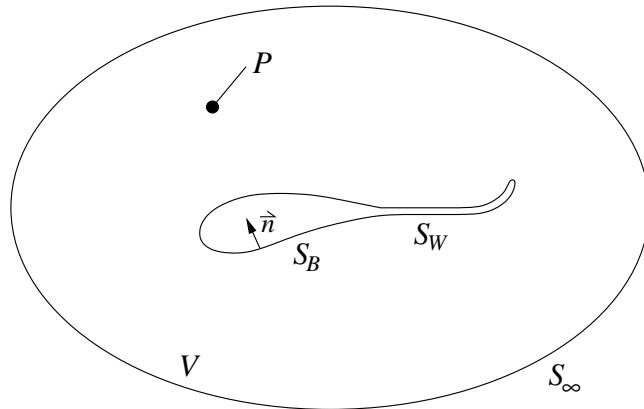
$$\gamma_j = \left(\frac{c_a l}{2b} \right)_j = \frac{1}{V_\infty b} \sum_{i=1}^M \Gamma_{ij} \quad .$$

Bestimmt man sich durch Interpolation die Werte für die örtliche Zirkulation in den Multhopp'schen Schnitten, so lässt sich damit sowohl die Bestimmung von α_i als auch die nachfolgende Integration längs der Spannweite bequem ausführen.

2.5.3 Das Panel-Verfahren zur Lösung des Auftriebs- und Dickenproblems

In diesem Abschnitt soll eine Methode dargestellt werden, mit der die Druckverteilung an Tragflügeln mit Dicke und Wölbung berechnet werden kann. In seinen Grundzügen besteht das Panel-Verfahren aus mehreren grundlegenden Schritten. Im ersten Schritt wird die Oberfläche des Tragflügels in eine große Zahl von viereckigen Oberflächenelementen (Panel) zerlegt. Die Oberflächen werden darauf mit Singularitäten belegt, zum Beispiel mit flächenhaften Verteilungen von Quellen sowie von Dipolen. Durch die Festlegung einer bestimmten Stärke der Singularitäten auf jedem Oberflächenelement kann die kinematische Strömungsbedingung zumindest jeweils in einem Aufpunkt eines jeden Oberflächenelements erfüllt werden. Die numerische Aufgabe besteht also darin, genau diese Singularitätenstärken zu ermitteln. Dieses führt zur Aufstellung eines Gleichungssystems für die Singularitätenstärken, das mit numerischen Standardmethoden gelöst werden kann. Im letzten Schritt kann durch Überlagerung der induzierten Geschwindigkeiten der nun bekannten Singularitäten und der Geschwindigkeit der freien Anströmung das Strömungsfeld in jedem beliebigen Punkt berechnet werden. Die Panel-Methode kann auch auf komplexe Flugzeugkonfigurationen mit Rumpf, Tragflügeln, Leitwerken etc. erweitert werden. Hierzu wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.

Im Folgenden soll das Panel-Verfahren aus der allgemeinen Lösung für das Störpotential nach Abschnitt 2.1 hergeleitet werden. Danach existiert für das Potential im Gebiet V



die allgemeine Lösung für das Störpotential

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_W} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + \varphi_\infty(P) .$$

Diese Lösung erfüllt die Laplace-Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ und die Randbedingung im Unendlichen $\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \varphi = 0$. Die Quellsingularitäten σ und Dipolsingularitäten μ auf der Flügelkontur S_B und entlang des Nachlaufs S_W sollen jetzt so bestimmt werden, dass auch die kinematische Strömungsbedingung und die Kutta'sche Abflussbedingung erfüllt werden.

2.5.3.1 Kinematische Strömungsbedingung als Neumann-Problem

Die kinematische Strömungsbedingung

$$\nabla \varphi \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = -\vec{n} \vec{V}_\infty$$

wird hier direkt durch Einsetzen der Elementarlösungen aufgestellt. Es war

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B + S_w} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \sigma \left(\frac{1}{r} \right) dS + C$$

Also

$$\left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{S_B + S_W} \mu \nabla \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \sigma \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS + \vec{V}_\infty \right\} \cdot \vec{n} = 0$$

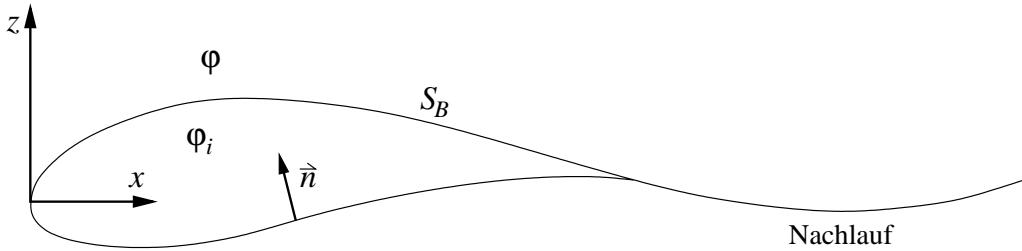
Diese Gleichung gilt für jeden Punkt auf der Oberfläche S_B .

Vorgehen in numerischen Methoden:

- Wahl von Aufpunkten, dort Ansetzen der kinematischen Strömungsbedingung
- Damit Umwandlung der Integralgleichung in algebraisches Gleichungssystem möglich

2.5.3.2 Kinematische Strömungsbedingung als Dirichlet-Problem

Ausgangspunkt ist das Sprungverhalten der Geschwindigkeiten über eine mit Quellen und Dipolen belegte Oberfläche S_B :



Die verallgemeinerte Form des Verhaltens der Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle von S_B ist (vgl. Abschnitt 2.1.4, allgemeine Form hier ohne Beweis):

$$\vec{v}(\vec{x} \epsilon S_B^\pm) = \vec{v}(\vec{x} \epsilon S_B) \pm \frac{1}{2} (-\sigma \vec{n} - \nabla \mu)$$

- Erster Term der r. S.: Störgeschwindigkeiten als Folge der Singularitätenbelegung von $\vec{x}' \neq \vec{x}$
- $-\sigma \vec{n}$: Sprung der Normalgeschwindigkeit infolge Quellbelegung im Punkt $\vec{x}' = \vec{x}$. Vorzeichen folgt daraus, dass \vec{n} in Richtung S_B^- zeigt
- $-\nabla \mu$: Sprung der Geschwindigkeit in tangentialer Richtung infolge Dipolbelegung im Punkt $\vec{x}' = \vec{x}$

Nehmen wir an, die gesuchte Lösung der Potentialfunktion im Innern des Körpers habe die Eigenschaft

$$\Phi_i = \Phi_\infty \quad \text{für alle } \vec{x} \epsilon S_B^- , \quad \Phi_\infty = U_\infty x + V_\infty y + W_\infty z$$

oder

$\varphi_i = 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \epsilon S_B^- .$

Zur Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung muss der Vektor der Normalgeschwindigkeit infolge der Anströmung entgegengesetzt zum Sprung der Normalgeschwindigkeit in Folge der Belegung mit Singularitäten sein.

$$\vec{n} \cdot \vec{V}_\infty \cdot \vec{n} = \sigma \vec{n}$$

$$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{V}_\infty$$

Damit sind die Quellstärken an allen Punkten der Kontur bestimmt und erfüllen die kinematische Strömungsbedingung. Die Belegung mit Dipolen erzeugt auf S_B^+ nur eine Änderung der Tangentialgeschwindigkeit und steht somit im Einklang mit der kinematischen Strömungsbedingung.

Die Forderung nach $\varphi_i = 0$ kann durch Anwendung der allgemeinen Lösung

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B + S_W} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \sigma \left(\frac{1}{r} \right) dS = 0$$

in diskreten Aufpunkten erfüllt werden. Für die Eindeutigkeit der gesuchten Verteilungen von μ muss der Wert von μ im Nachlauf S_W mit Hilfe der Kutta-Bedingung festgelegt werden.

2.5.3.3 Kutta'sche Abflussbedingung

Mit Hilfe der Kutta'schen Abflussbedingung wird aus der Zahl der möglichen Lösungen diejenige ausgewählt, bei der die Strömung an der Hinterkante des Tragflügels glatt abströmt. Entsprechend dem Vorgehen bei der Tragflügeltheorie muss hierfür die Form, Position und Stärke der Singularitätenbelegung im Nachlauf festgelegt werden.

Dipolstärke im Nachlauf

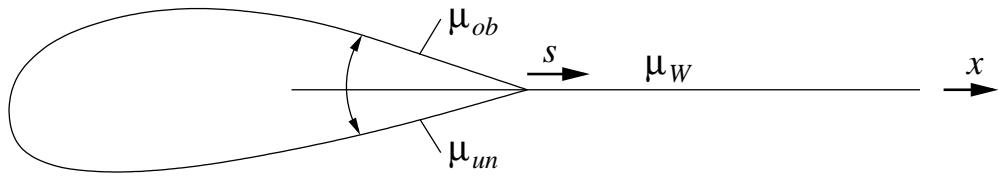
Für die Wirbelverteilung der Skelett-Theorie war die Kutta'sche Abflussbedingung

$$k(x' = l) = 0 \quad \text{für } p_{un} = p_{ob}$$

Für die Dipolverteilung an der Hinterkante bedeutet das

$$\frac{\partial \mu(x')}{\partial x'} = 0$$

von der Hinterkante über den gesamten Nachlauf. Für einen Profilschnitt am Tragflügel bedeutet das:



$$\mu_{(x'=l)} = \text{const.} = \mu_W$$

An der Hinterkante wirken die Dipolverteilungen von Ober- und Unterseite in entgegengesetzte Richtungen und somit gilt

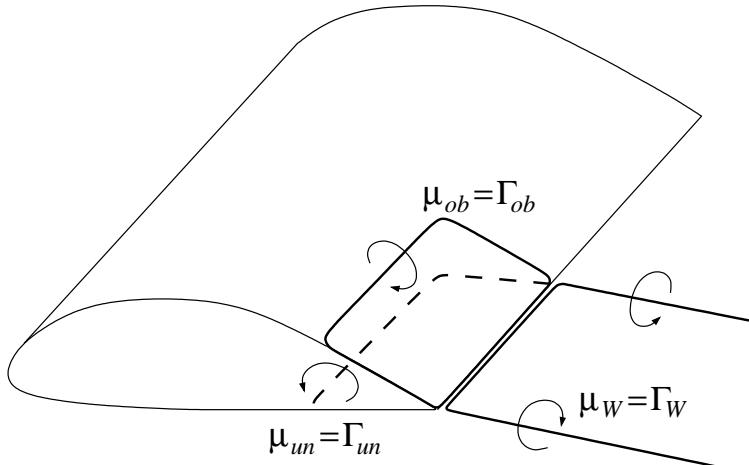
$$\boxed{\mu_{ob} - \mu_{un} = \mu_W}$$

zur Bestimmung der Dipolstärke des Nachlaufs.

Alternativ: Forderung nach gleicher Tangentialgeschwindigkeit auf Ober- und Unterseite an der Hinterkante. In Verbindung mit der Sprungbeziehung der Tangentialgeschwindigkeit in der Dirichlet-Randbedingung führt das auf

$$\frac{\partial \mu_{ob}}{\partial s} = \frac{\partial \mu_{un}}{\partial s} \quad , \quad s: \text{Konturkoordinate in Richtung der Hinterkante}$$

Anwendungsbeispiel für Kutta-Bedingung:



- Belegung der Panels mit Dipolverteilung konstanter Stärke
- äquivalent zu Wirbelring um Panelrand
- Forderung nach $\mu_{ob} - \mu_{un} - \mu_W = 0$
- Ergebnis: $\Gamma_W = \Gamma_{ob} - \Gamma_{un}$

Form des Nachlaufs

In 3D Strömungen um Tragflügel ist die Form des Nachlaufs wichtig, da er als Wirbelschicht Störgeschwindigkeiten auf dem Flügel und anderen Teilen der Konfiguration induziert.

Nachlaufeigenschaften:

1. erzeugt keinen Auftrieb - freier, nicht tragender Wirbel
2. Geschwindigkeitsvektor parallel zur Wirbelschicht
3. Stärke der Längswirbel = *const.* wegen Helmholtz-Wirbelsatz
4. oder μ_W längs des Nachlaufs = *const.*

Eigenschaft 2. ist schwierig zu erfüllen, da Geschwindigkeitsfeld apriori unbekannt ist. In vielen praktischen Fällen kann aber die Form des Nachlaufs als gerade Verlängerung des Hinterkanten-Bisektors angenähert werden.

2.5.3.4 Aufstellung des linearen Gleichungssystems

Hier sollen die prinzipiellen Schritte skizziert werden, mit denen die Integralgleichungen der kinematischen Strömungsbedingungen nach Abschnitt -5.1- und -5.2- in ein lineares algebraisches Gleichungssystem reduziert werden, das numerisch gelöst werden kann.

Das Problem sei eindeutig definiert durch

- Festlegung der Kombination von Quellen und Dipolen, z. B. nach den Gleichungen $\sigma = \vec{n} \cdot \vec{V}_\infty$, $\varphi_i = 0$ (vgl. 2.5.3.2)
- Definition der Kutta'schen Abflussbedingung und der Form des Nachlaufs

Nun wird die Oberfläche S_B in Oberflächenelemente (Panel) zerlegt. Im einfachsten Fall sind das Panel, die mit vier geraden Seiten beschrieben werden und eine flache Oberfläche aufweisen:

N Panel auf S_B

N_W Nachlaufpanel auf S_W

Die kinematische Strömungsbedingung wird auf den Aufpunkten der Panel angesetzt. Die Dirichlet-Randbedingung

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_B + S_W} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \sigma \left(\frac{1}{r} \right) dS = 0$$

geht für jeden Aufpunkt über in

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi} \int_{S_B \text{ Panel}} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + \sum_{l=1}^{N_W} \frac{1}{4\pi} \int_{S_W \text{ Panel}} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi} \int_{S_B \text{ Panel}} \sigma \left(\frac{1}{r} \right) dS = 0$$

Für jeden Aufpunkt findet Summation der Einflüsse aller Panel statt!

Dabei kann die Berechnung des Einflusses eines einzelnen Panels auf die Potentialfunktion als numerischer Einflusskoeffizient abgespeichert werden:

$$\frac{1}{4\pi} \int \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \Big|_k = \mu C_k$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int \sigma \left(\frac{1}{r} \right) dS \Big|_k = \sigma B_k$$

Die Dirichlet-Bedingung wird damit zu

$$\sum_{k=1}^N C_k \mu_k + \sum_{l=1}^{N_W} C_l \mu_l + \sum_{k=1}^N B_k \sigma_k = 0 \quad .$$

Die σ_k sind bekannt durch $\sigma_k = \vec{n}_k \cdot \vec{V}_\infty$. Die μ_l sind über die Kutta-Bedingung verknüpft mit speziellen μ_k -Werten der Hinterkantenpanel. Das heißt, dass die Werte von C_k für Hinterkantenpanels um Beiträge des Nachlaufs geändert werden. Die Dirichlet-Randbedingung für den Aufpunkt P wird somit

$$\sum_{k=1}^N C_k \mu_k = - \sum_{k=1}^N B_k \sigma_k \quad .$$

Durch Aufstellen dieser Gleichung für alle Aufpunkte erhält man das Gleichungssystem.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ \vdots \\ RHS_N \end{bmatrix}$$

Die Terme RHS_1 , RHS_2 , ... können mit Hilfe der bekannten Quellstärken berechnet werden.

Durch numerische Lösung dieses vollbesetzten Gleichungssystems können die μ_k bestimmt werden.

Der Geschwindigkeitsvektor an den Aufpunkten der Panel ist dann

$$\vec{V}_k = \vec{V}_\infty + q_{nk} \cdot \vec{n}_k + q_{lk} \cdot \vec{l}_k + q_{mk} \cdot \vec{m}_k$$

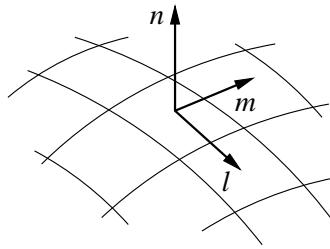
$\vec{n}_k, \vec{l}_k, \vec{m}_k$ Einheitsvektoren der lokalen Panelkoordinaten

$q_{nk} = -\sigma_k$ Normalgeschwindigkeit aus Quellstärke

$q_{lk} = -\frac{\partial \mu_k}{\partial l_k}$ Tangentialgeschwindigkeit aus Gradient der Dipolstärke in l -Richtung

$q_{mk} = -\frac{\partial \mu_k}{\partial m_k}$ Tangentialgeschwindigkeit aus Gradient der Dipolstärke in m -Richtung

Die Gradienten der Dipolstärke können durch finite Differenzen über benachbarte Panels angenähert werden.



Der Druckbeiwert folgt aus der Bernoulligleichung für inkompressible Strömung

$$c_{p_k} = 1 - \frac{\vec{V}_k^2}{\vec{V}_\infty^2}.$$

2.5.3.5 Einfache Singularitäten-Elemente und ihre Einflusskoeffizienten

Es werden beispielhaft einfache Singularitätenbelegungen vorgestellt und analysiert. Dieses sind Elemente mit konstanter Singularitätenstärke und flachen Panelgeometrien. Hinsichtlich der mathematischen Beschreibung von weiteren Elementen mit Belegungen, insbesondere solcher höherer Ordnung, wird auf die Fachliteratur am Ende des Kapitels verwiesen.

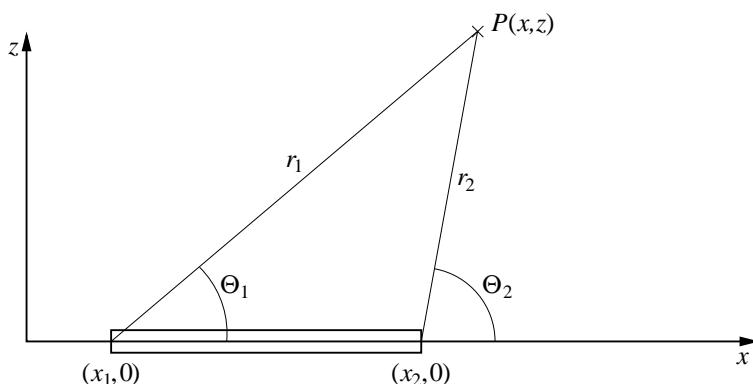
2D Quellverteilung mit konstanter Stärke

Eine Quellverteilung, die auf der x' -Achse von $x' = x_1$ bis $x' = x_2$ angeordnet ist, induziert im Aufpunkt P Störpotential und Geschwindigkeitskomponenten entsprechend den Gleichungen in Abschnitt 2.1.3.1

$$\varphi_Q = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \ln \sqrt{(x - x')^2 + z^2} dx'$$

$$u = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x'}{(x - x')^2 + z^2} dx'$$

$$w = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z}{(x - x')^2 + z^2} dx'$$



Die Integrale dieser Gleichungen können analytisch entsprechend [6] gelöst werden. Nach längerer Algebra ergibt sich

$$\varphi_Q = \frac{\sigma}{4\pi} [(x - x_1) \ln r_1^2 - (x - x_2) \ln r_2^2 + 2z(\Theta_2 - \Theta_1)]$$

$$\text{mit } \Theta_k = \arctan \frac{z}{x - x_k} \quad r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + z^2}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten folgen durch Differenzieren des Störpotentials:

$$u = \frac{\sigma}{4\pi} \ln \frac{(x - x_1)^2 + z^2}{(x - x_2)^2 + z^2}$$

$$w = \frac{\sigma}{2\pi} \left[\arctan \frac{z}{x - x_2} - \arctan \frac{z}{x - x_1} \right]$$

Mit diesen Formeln werden die Einflusskoeffizienten von Panels für den Fall berechnet, dass der Punkt P nicht auf dem Panel liegt.

Von Interesse ist auch der Fall, dass der Aufpunkt auf dem induzierenden Panel liegt, d.h. der Einflusskoeffizient eines Panels auf seinem eigenen Aufpunkt:

$$\varphi_Q(x, 0\pm) = \frac{\sigma}{4\pi} [(x - x_1) \ln (x - x_1)^2 - (x - x_2) \ln (x - x_2)^2]$$

$$u(x, 0\pm) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{(x - x_1)}{|(x - x_2)|} \quad (= 0 \text{ im Mittelpunkt des Panels})$$

Die Normalgeschwindigkeit wurde bereits in Abschnitt 2.1.4.1 angegeben:

$$w(x, 0\pm) = \pm \frac{\sigma}{2} .$$

2D Dipolverteilung mit konstanter Stärke

Eine Dipolverteilung mit der Dipolachse in z -Richtung, die auf der x' -Achse von $x' = x_1$ bis $x' = x_2$ angeordnet ist, induziert im Aufpunkt P Störpotential und Geschwindigkeitskomponenten entsprechend den Gleichungen in Abschnitt 2.1.3.2

$$\varphi_D = -\frac{\mu}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z}{(x - x')^2 + (z - z')^2} dx'$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\mu}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x')^2 z}{[(x - x')^2 + z^2]^2} dx'$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x')^2 - z^2}{[(x - x')^2 + z^2]^2} dx'$$

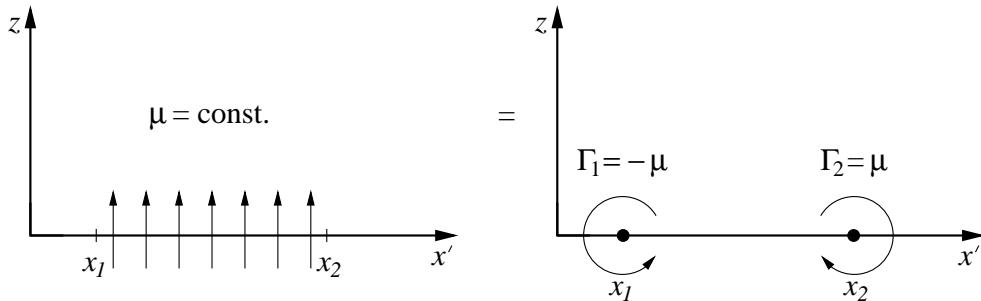
Das Integral des Störpotentials entspricht dem Integral für die Normalgeschwindigkeit der Quellverteilung. Also

$$\varphi_D = -\frac{\mu}{2\pi} \left[\arctan \frac{z}{x-x_2} - \arctan \frac{z}{x-x_1} \right] .$$

Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit der Potentialfunktion eines rechtsdrehenden Potentialwirbels im Punkt (x', z')

$$\varphi_w = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{z-z'}{x-x'} , \quad \text{vgl. Vorlesung Strömungsmechanik II}$$

zeigt, dass die Dipolverteilung konstanter Stärke equivalent ist zu zwei diskreten Potentialwirbeln an den Panelkanten, die entgegengesetzte Drehrichtung aufweisen:



Aus dieser Betrachtung ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten entsprechend den Ergebnissen der Vorlesung Strömungsmechanik II:

$$u = \frac{-\mu}{2\pi} \left[\frac{z}{(x-x_1)^2 + z^2} - \frac{z}{(x-x_2)^2 + z^2} \right]$$

$$w = \frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2 + z^2} - \frac{x-x_2}{(x-x_2)^2 + z^2} \right]$$

Wenn der Punkt P auf der Oberfläche des Panels liegt, so erhält man nach Abschnitt 2.1.4.2

$$\varphi(x, 0\pm) = \mp \frac{\mu}{2}$$

und die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$u(x, 0\pm) = \mp \frac{d\mu(x)}{dx} = 0$$

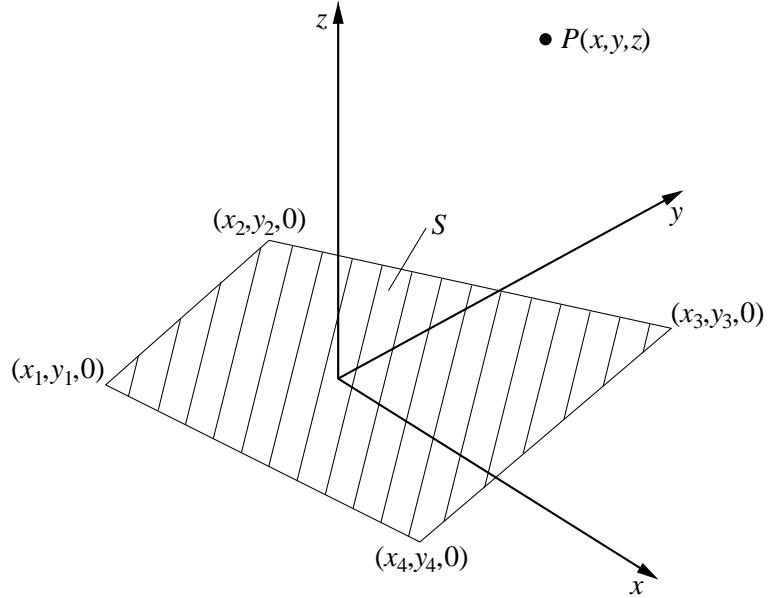
$$w(x, 0\pm) = \frac{-\mu}{2\pi} \left[\frac{1}{(x-x_1)} - \frac{1}{(x-x_2)} \right]$$

Somit sind die Störgeschwindigkeiten singulär an den Seitenkanten des Panels.

Mit den hiermit vorliegenden Herleitungen für die Einflusskoeffizienten von Quell- und Dipolverteilungen kann ein numerisches Panelverfahren zur Berechnung von 2D Strömungen direkt erstellt werden.

3D Quell- und Dipolverteilungen konstanter Stärke

Ein viereckiges Panel mit geraden Seitenkanten wird durch die vier Eckpunkte definiert

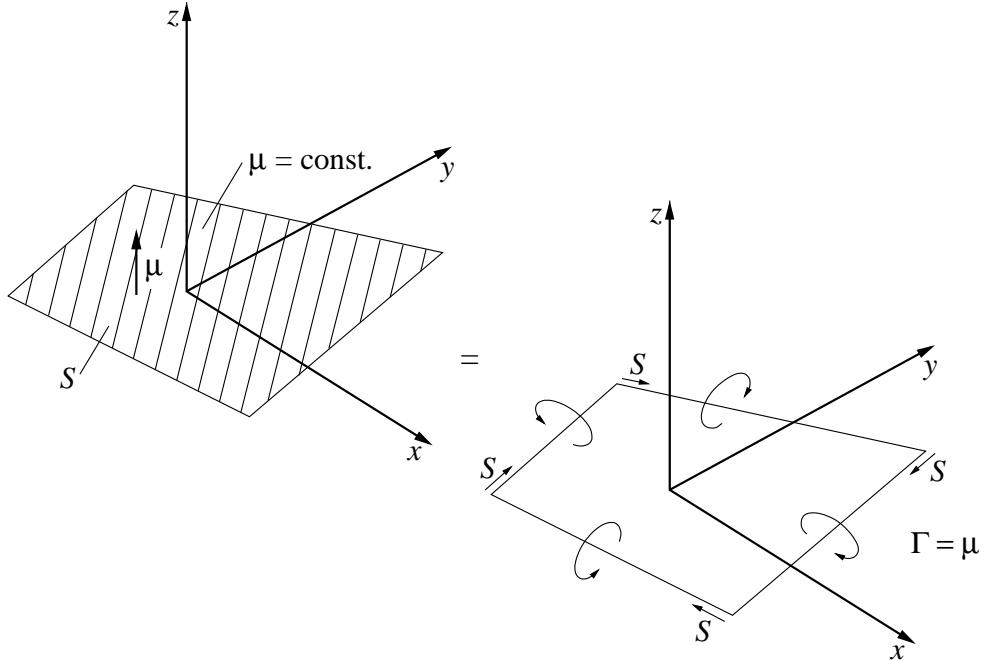


Das Störpotential des Panels mit konstanter Quellstärke ist nach der allgemeinen Lösung

$$\varphi(x, y, z) = \frac{-\sigma}{4\pi} \int_S \frac{dS}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}}$$

Die Integration führt selbst in den lokalen Koordinaten des Panels, bei dem das Panel in der $x - y$ Ebene angeordnet ist, zu langwierigen Ausdrücken, Ref. [6], [11]. Das geht ebenso für die induzierten Geschwindigkeiten u, v, w .

Entsprechend verhält es sich mit einer Dipolbelegung konstanter Stärke. Diese ist äquivalent zu einem Wirbelring entlang der Ränder des Panels:



Bezeichnet man mit r den Abstand des Aufpunktes P vom induzierenden Punkt $(x', y', 0)$, dann ist das Störpotential nach Abschnitt 2.1.3.2

$$\varphi_D = -\frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} dS .$$

Der Zähler des Integranden ist gleich dem Wert von z im lokalen Koordinatensystem des Panels und somit gilt

$$\varphi_D = -\frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{z dS}{r^3} .$$

Die Störgeschwindigkeiten können mit Hilfe des Biot-Savart Gesetzes für den Wirbelring berechnet werden, die allgemeine Form lautet:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} , \quad \Gamma = \mu$$

Die Resultate für vorgegebene Lage der Paneeckpunkte sind wiederum sehr lang, vgl. die angegebene Literatur [6], [11].

2.6 Literatur zu Kapitel 2

- [1] D. Hummel: Aerodynamik II - Einführung in die Tragflügeltheorie. Fachbereich Maschinenbau der TU Braunschweig, 2003.
- [2] D. Kuchemann: The Aerodynamic Design of Aircraft. Pergamon Press Oxford, 1978.
- [3] J. D. Anderson jr.: Fundamentals of Aerodynamics, Second Edition. McGraw Hill New York, 1991.
- [4] H. Schlichting, E. Truckenbrodt: Aerodynamik des Fahrzeuges, Band I/II, 3. Auflage. Springer Verlag Berlin, 2001.
- [5] B. Twaites: Incompressible Aerodynamics. Clarendon Press Oxford, 1960.
- [6] J. Katz, A. Plotkin: Low-Speed Aerodynamics, Second Edition. Cambridge University Press, 2001.
- [7] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, 1999.
- [8] H. Multhopp: Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 153-169.
- [9] E. Truckenbrodt: Tragflächentheorie bei inkompressibler Strömung. WGL Jahrbuch 1953, S. 40-65.

- [10] D. Küchemann: A simple method for calculating the span- and chordwise loading on straight and swept wings of any given aspect ratio at subsonic speeds. ARC Rep. Mem. 2935 (1956).
- [11] J. L. Hess, A. M. O. Smith: Calculation of Aerodynamic Flows. Progress in Aeronautical Science, Vol. 8, 1967, pp. 1-138.
- [12] W. Kraus, P. Sacher: Das Panelverfahren zur Berechnung der Druckverteilung von Flugkörpern im Unterschallbereich. Z. Flugwiss. 21, Nr. 9, 1973, S. 301-311.

3 Der Tragflügel bei Überschallgeschwindigkeit

Im Rahmen der Theorie kleiner Störungen ist die Potentialgleichung

$$(1 - Ma_{\infty}^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

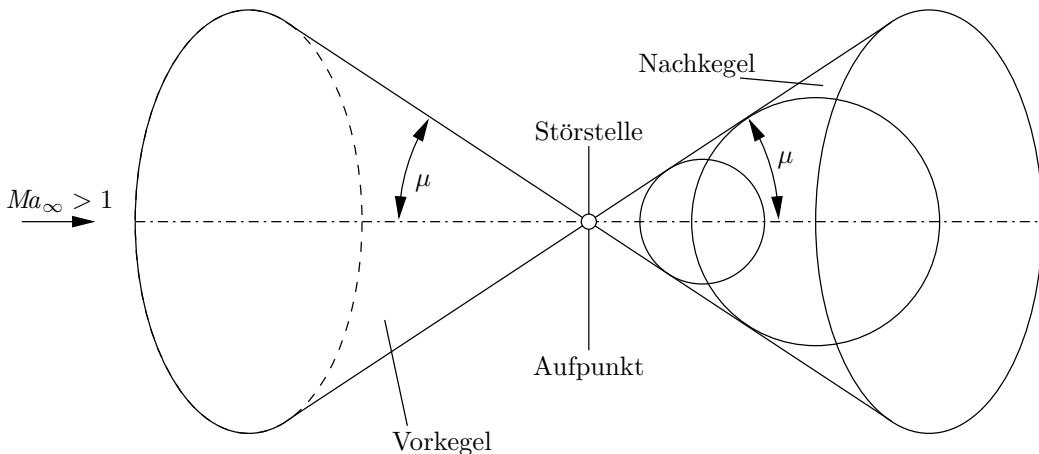
zu lösen. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

Unterschallanströmung, $Ma_{\infty} < 1$.

In diesem Fall ist die Differentialgleichung vom elliptischen Typ. Der zugehörige Mechanismus der Störungsausbreitung ist dadurch gekennzeichnet, dass die von einem Punkt des Strömungsfeldes ausgehenden Störungen jeden beliebigen anderen Punkt des Strömungsfeldes erreichen, weil die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit) der Störungen überall größer ist als die örtliche Strömungsgeschwindigkeit.

Überschallströmung, $Ma_{\infty} > 1$.

In diesem Fall ist die Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ. Stromabwärts von einer Störstelle



breiten sich die Störungen nur im Nachkegel (Mach'scher Kegel) dieser Störstelle aus. Für seinen (halben) Öffnungswinkel (Mach'scher Winkel) μ gilt (Zeitintervall τ)

$$\sin \mu = \frac{a_{\infty} \cdot \tau}{V_{\infty} \cdot \tau} = \frac{1}{V_{\infty}/a_{\infty}} = \frac{1}{Ma_{\infty}}$$

$$\tan \mu = \frac{\sin \mu}{\sqrt{1 - \sin^2 \mu}} = \frac{1}{\sqrt{Ma_{\infty}^2 - 1}} .$$

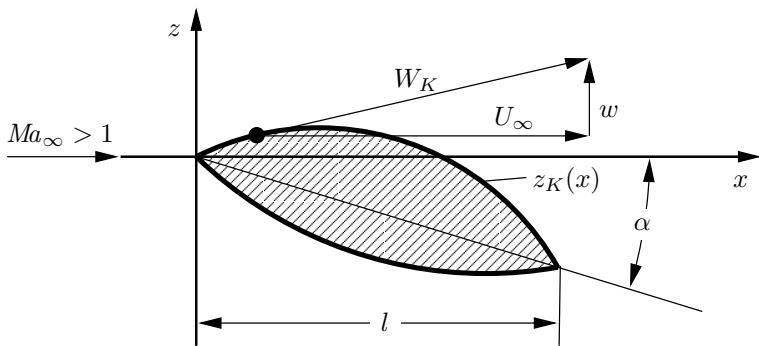
Betrachtet man umgekehrt einen Aufpunkt, so kann dieser nur von Störungen erreicht werden, die von Störstellen ausgehen, die im Vorkegel

(Abhängigkeitsbereich) dieses Punktes liegen.

Die Lösungen der hyperbolischen Differentialgleichung sind von denen der elliptischen Differentialgleichung grundverschieden. Deshalb muss der Fall einer Überschallströmung ganz neu betrachtet werden.

3.1 Einführung in das 2D Problem

3.1.1 Aufgabenstellung und allgemeine Lösung



Es soll ein beliebiges Profil (kleine relative Dicke, kleine relative Wölbung, kleiner Anstellwinkel α) in der x - z -Ebene betrachtet werden. Die Kontur sei $z_K(x)$. Die zu lösende Potentialgleichung lautet

$$(Ma_\infty^2 - 1)\varphi_{xx} - \varphi_{zz} = 0 \quad .$$

Man könnte diese Potentialgleichung mit Hilfe der Göthert'schen Regel oder der Ackeret'schen Regel auf den Fall $Ma_\infty = \sqrt{2}$ transformieren, so dass dann nur noch die Potentialgleichung $\varphi_{xx} - \varphi_{zz} = 0$ zu behandeln wäre. Die hier folgende Theorie ist jedoch so einfach, dass es keine Erschwernis bedeutet, die Machzahl Ma_∞ in der Gleichung zu belassen. Die Ergebnisse enthalten dann die Ackeret'sche Regel automatisch.

Die Randbedingungen lauten

$$x \rightarrow -\infty : \varphi_x = \varphi_z = 0$$

$$\text{Am Körper } z_K(x) : \frac{dz_K}{dx} = \frac{w}{U_\infty} \quad ^3.$$

Für das so beschriebene Problem existiert eine allgemeine Lösung. Sie lautet

$$\varphi = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

³Hier wird die Geschwindigkeit der Anströmung mit U_∞ bezeichnet

mit

$$\begin{aligned}\xi &= z - x \tan \mu \\ \eta &= z + x \tan \mu\end{aligned}\quad \text{und} \quad \tan \mu = \frac{1}{\sqrt{Ma_{\infty}^2 - 1}}.$$

Dies ist die d'Alembert'sche Lösung. f_1 und f_2 sind zwei beliebige Funktionen der Argumente ξ bzw. η , die aus den Randbedingungen zu ermitteln sind. Die Gültigkeit der d'Alembert'schen Lösung lässt sich leicht beweisen. Es ist

$$\varphi_{xx} = \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{d^2 f_2}{d\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + \frac{d^2 f_2}{d\eta^2} \right) \tan^2 \mu$$

und

$$\varphi_{zz} = \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{d^2 f_2}{d\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 = \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + \frac{d^2 f_2}{d\eta^2}.$$

Eingesetzt in die Potentialgleichung ergibt sich

$$(Ma_{\infty}^2 - 1) \left(\frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + \frac{d^2 f_2}{d\eta^2} \right) \cdot \frac{1}{Ma_{\infty}^2 - 1} - \left(\frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + \frac{d^2 f_2}{d\eta^2} \right) = 0$$

und man sieht, dass die Gleichung erfüllt ist.

Die d'Alembert'sche Lösung kann folgendermaßen interpretiert werden. Zunächst ergibt sich für die Störgeschwindigkeiten

$$u = \varphi_x = f'_1(-\tan \mu) + f'_2 \tan \mu = (f'_2 - f'_1) \tan \mu$$

$$w = \varphi_z = f'_1 + f'_2,$$

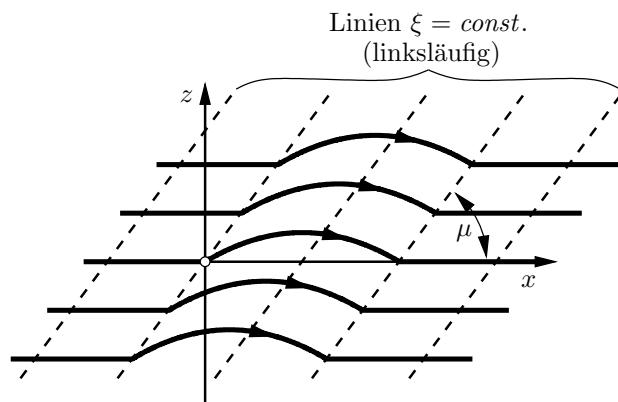
wobei $f'_1 = df_1/d\xi$ und $f'_2 = df_2/d\eta$ bedeuten. Man kann nun zwei Fälle unterscheiden, nämlich

a) $f_2 = \text{const.}$, $f'_2 = 0$. Dann ist

$$u = -\tan \mu f'_1(\xi)$$

$$w = f'_1(\xi).$$

Auf den Linien $\xi = \text{const.}$ sind dann u, w, c_p und die Stromlinienniegung dz/dx jeweils konstant. Damit ergibt sich für ein Beispiel der gezeichnete Stromlinienverlauf.

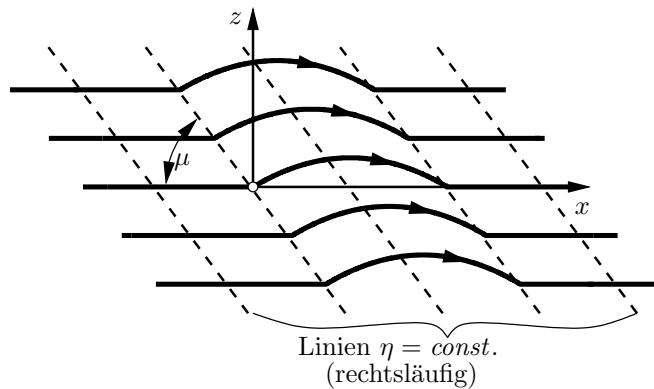


b) $f_1 = \text{const.}$, $f'_1 = 0$. Dann ist

$$u = \tan \mu f'_2(\eta)$$

$$w = f'_2(\eta) .$$

Auf den Linien $\eta = \text{const.}$ sind dann u, w, c_p und die Stromlinieneigung dz/dx jeweils konstant.

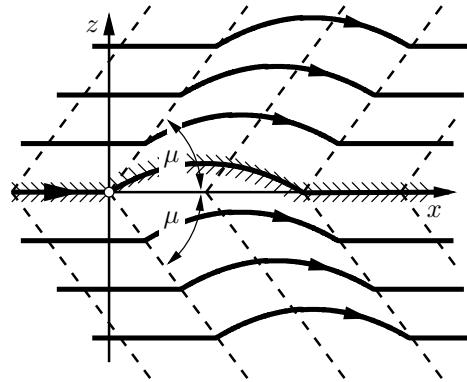


In den beiden skizzierten Fällen sind auf den Linien $\xi = \text{const.}$ bzw. $\eta = \text{const.}$ alle Strömungszustände gleich, so dass sich die gezeichneten Stromlinienbilder ergeben. Die Linien $\xi = \text{const.}$ (linksläufig) und $\eta = \text{const.}$ (rechtsläufig) sind die Charakteristiken oder die Mach'schen Linien des Strömungsfeldes.

Die Funktionen f_1 und f_2 ergeben sich aus den Randbedingungen. Bei der Umströmung eines Körpers (Beispiel gewölbte Platte) darf in der Zuströmung keine Störung vorhanden sein. Jede Stromlinie lässt sich als feste Wand auffassen. Es gilt

- obere Hälfte:
nur linksläufige Machlinien
 $\xi = \text{const.}$, $f_2 = \text{const.}$
- untere Hälfte:
nur rechtsläufige Machlinien
 $\eta = \text{const.}$, $f_1 = \text{const.}$,

weil stromauf keine Störung vorhanden sein kann.

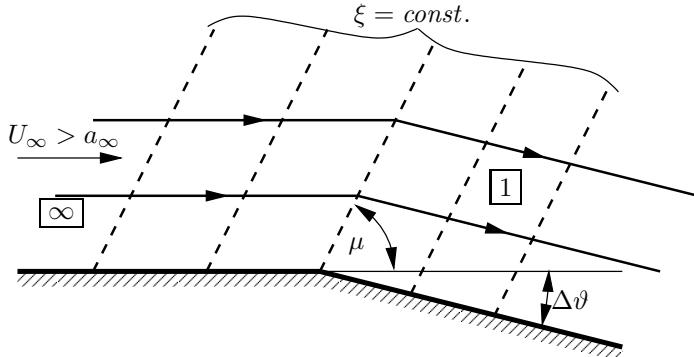


Aus dem skizzierten Stromlinienbild für eine gewölbte Platte ergibt sich, dass sich die von ihr ausgehenden Störungen nur nach hinten fortpflanzen, und zwar entlang der Mach'schen Linien. Oberseiten- und Unterseitenströmung können einfach aneinandergesetzt werden. Störungen der Oberseite beeinflussen die Unterseite nicht (und umgekehrt).

3.1.2 Die Umströmung einer flachen Ecke

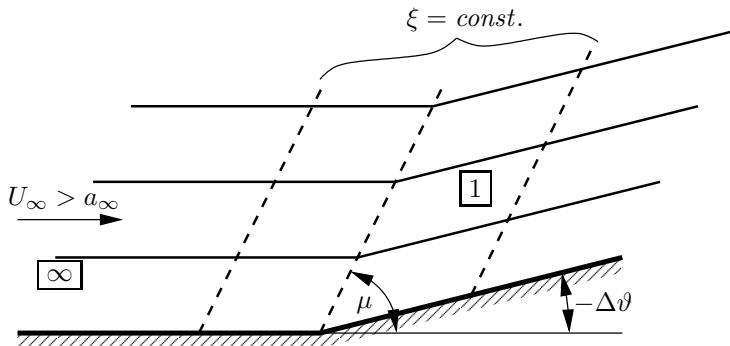
Ein wichtiges Grundproblem der Profiltheorie im Überschall ist die Umströmung einer flachen Ecke. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Konvexe Ecke



Verdünnung statt. Die Strömung um eine konvexe Ecke, wie sie hier im Rahmen der linearisierten Theorie für Überschallströmungen behandelt wird, stellt eine Näherung für die exakte Lösung der Prandtl–Meyer'schen Eckenströmung für beliebige Umlenkinkel $\Delta\vartheta > 0$ dar [3], [4].

Konkave Ecke



Verzögerung, Druckanstieg und Verdichtung statt.

Die Strömung um eine konkav flache Ecke, wie sie hier im Rahmen der linearisierten Theorie für Überschallströmungen behandelt wird, stellt eine Näherung für den schrägen Verdichtungsstoß dar, der bei $\Delta\vartheta < 0$ auftritt (die Vertiefung des schrägen Verdichtungsstoßes erfolgt in der Vorlesung Profilaerodynamik).

In beiden Fällen können nur linksläufige Charakteristiken $\xi = \text{const.}$ auftreten, und es ist $f_2 = \text{const.}$, $f'_2 = 0$. Im Bereich der Zuströmung zur Ecke (Gebiet ∞) gilt

$$\frac{dz_K}{dx} = \frac{w}{U_\infty + u} = \frac{w}{U_\infty} = \frac{f'_1}{U_\infty} = 0 \quad .$$

In diesem Fall ist $\Delta\vartheta > 0$. Die Strömung verläuft bis zur linksläufigen Machlinie durch die Ecke ungestört, dahinter wandparallel. Stromab ist die Geschwindigkeit größer als die der Anströmung. An der Machlinie finden also Beschleunigung, Druckabsenkung und

In diesem Fall ist $\Delta\vartheta < 0$. Die Strömung verläuft wieder bis zur linksläufigen Machlinie durch die Ecke ungestört und dahinter wandparallel. In diesem Fall ist die Geschwindigkeit stromab kleiner als die Anströmgeschwindigkeit. An der Machlinie findet also

Damit ist

$$f'_1 = 0 \quad \text{und} \quad u_\infty = w_\infty = 0 \quad .$$

Dies ist die ungestörte Anströmung.

Im Gebiet (1) hinter der Ecke gilt

$$\frac{dz_K}{dx} \approx \frac{f'_1}{U_\infty} = -\Delta\vartheta \quad .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f'_1 &= -\Delta\vartheta U_\infty, & \text{also} & \quad u_1 = -f'_1 \tan \mu = \Delta\vartheta U_\infty \tan \mu \\ & & \text{und} & \quad w_1 = f'_1 = -\Delta\vartheta U_\infty \quad . \end{aligned}$$

Für die Druckänderung gilt im Rahmen der Theorie kleiner Störungen mit $c_p = -2u/U_\infty$

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_1 - p_\infty = c_{p_1} \frac{\varrho_\infty}{2} U_\infty^2 \\ \Delta p &= -\varrho_\infty U_\infty u_1 \quad , \end{aligned}$$

und mit dem Ergebnis $u_1 = \Delta\vartheta U_\infty \tan \mu$ folgt weiter

$$\Delta p = (-\Delta\vartheta) \varrho_\infty U_\infty^2 \tan \mu \quad .$$

An einer flachen Ecke ist die Druckänderung Δp der Umlenkung $\Delta\vartheta$ proportional. Im einzelnen gilt

Konvexe Ecke, $\Delta\vartheta > 0$: $\Delta p < 0$ Druckabnahme, Verdünnung, Geschwindigkeitszunahme

Konkave Ecke $\Delta\vartheta < 0$: $\Delta p > 0$ Druckzunahme, Verdichtung, Geschwindigkeitsabnahme.

Im Grenzfall sehr kleiner Umlenkungswinkel geht der Differenzenquotient in den Differentialquotienten über, und man erhält

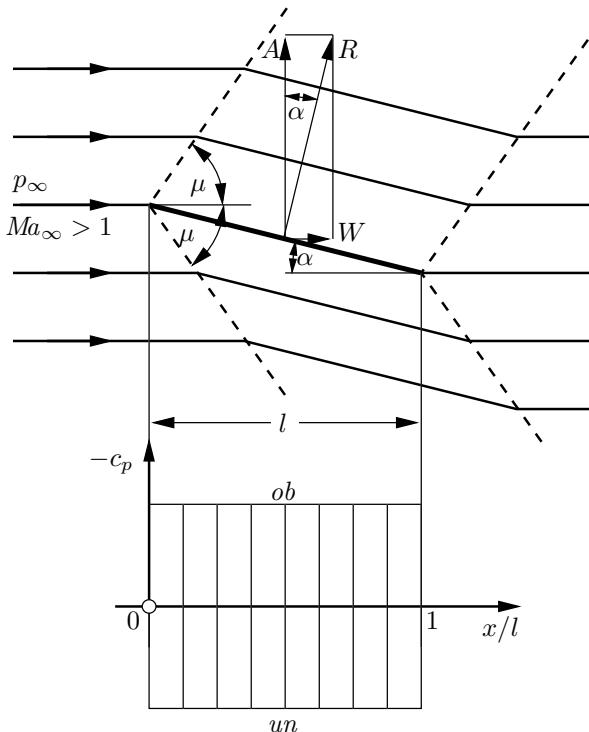
$$dp = -\frac{\varrho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} d\vartheta = K_\infty d\vartheta \quad ,$$

und durch Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_{p_\infty}^p dp &= K_\infty \int_0^\vartheta d\vartheta \\ p - p_\infty &= K_\infty \vartheta \quad . \end{aligned}$$

In einer Überschallströmung hängt der Druck außer von Anströmungsgrößen (K_∞ , also $\rho_\infty, U_\infty, Ma_\infty$) nur vom Neigungswinkel ϑ der örtlichen Strömungsrichtung gegen die Anströmung ab.

3.1.3 Die angestellte ebene Platte



Die Ergebnisse für die Umströmung einer flachen Ecke lassen sich einfach bei der angestellten ebenen Platte anwenden. Es ergibt sich das gezeichnete Stromlinienbild. Für die Druckverteilung folgt

$$\begin{aligned} p_{ob} - p_\infty &= -2q_\infty \alpha \tan \mu \\ p_{un} - p_\infty &= 2q_\infty \alpha \tan \mu \\ p_{un} - p_{ob} &= 4q_\infty \alpha \tan \mu. \end{aligned}$$

Für die Druckbeiwerte c_p lässt sich schreiben

$$\left. \begin{aligned} c_{p_{ob}} &= \frac{-2\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \\ c_{p_{un}} &= \frac{2\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \end{aligned} \right\} \Delta c_p = c_{p_{un}} - c_{p_{ob}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} .$$

Bei Überschallströmung ist die Druckverteilung an der angestellten ebenen Platte auf Unter- und Oberseite konstant. Vorder- und Hinterkante werden nicht umströmt. Die Druckdifferenz zwischen Unter- und Oberseite ist dort jeweils endlich. An der Vorderkante tritt keine Saugkraft auf, an der Hinterkante existiert eine Kutta'sche Abflussbedingung bei Überschallströmung nicht.

Die resultierende Luftkraft R ist

$$R = (p_{un} - p_{ob}) b \cdot l = 4 b l q_\infty \alpha \tan \mu .$$

Für den Auftrieb folgt daraus

$$A = R \cdot \cos \alpha \approx R$$

und

$$c_a = \frac{A}{q_\infty bl} = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} = \Delta c_p$$

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} .$$

Dieses berühmte Ergebnis stammt von Ackeret (1925). Für den Widerstand ergibt sich

$$W = R \cdot \sin \alpha \approx R \cdot \alpha \approx A \cdot \alpha$$

und

$$c_w = \frac{W}{q_\infty bl} = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} = \frac{1}{4} \sqrt{Ma_\infty^2 - 1} c_a^2$$

$$\frac{dc_w}{d(c_a^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{Ma_\infty^2 - 1} .$$

Im Gegensatz zur reibunglosen 2D Unterschallströmung (d'Alembert'sches Paradoxon) existiert in reibungsloser 2D Überschallströmung ein Widerstand. Er heißt Wellenwiderstand. Die angestellte ebene Platte besitzt einen auftriebsabhängigen Wellenwiderstand, welcher dem Quadrat des Auftriebs proportional ist.

Wegen der konstanten Druckverteilung greift die resultierende Luftkraft bei $x_D = l/2$ an. Für das Nickmoment folgt

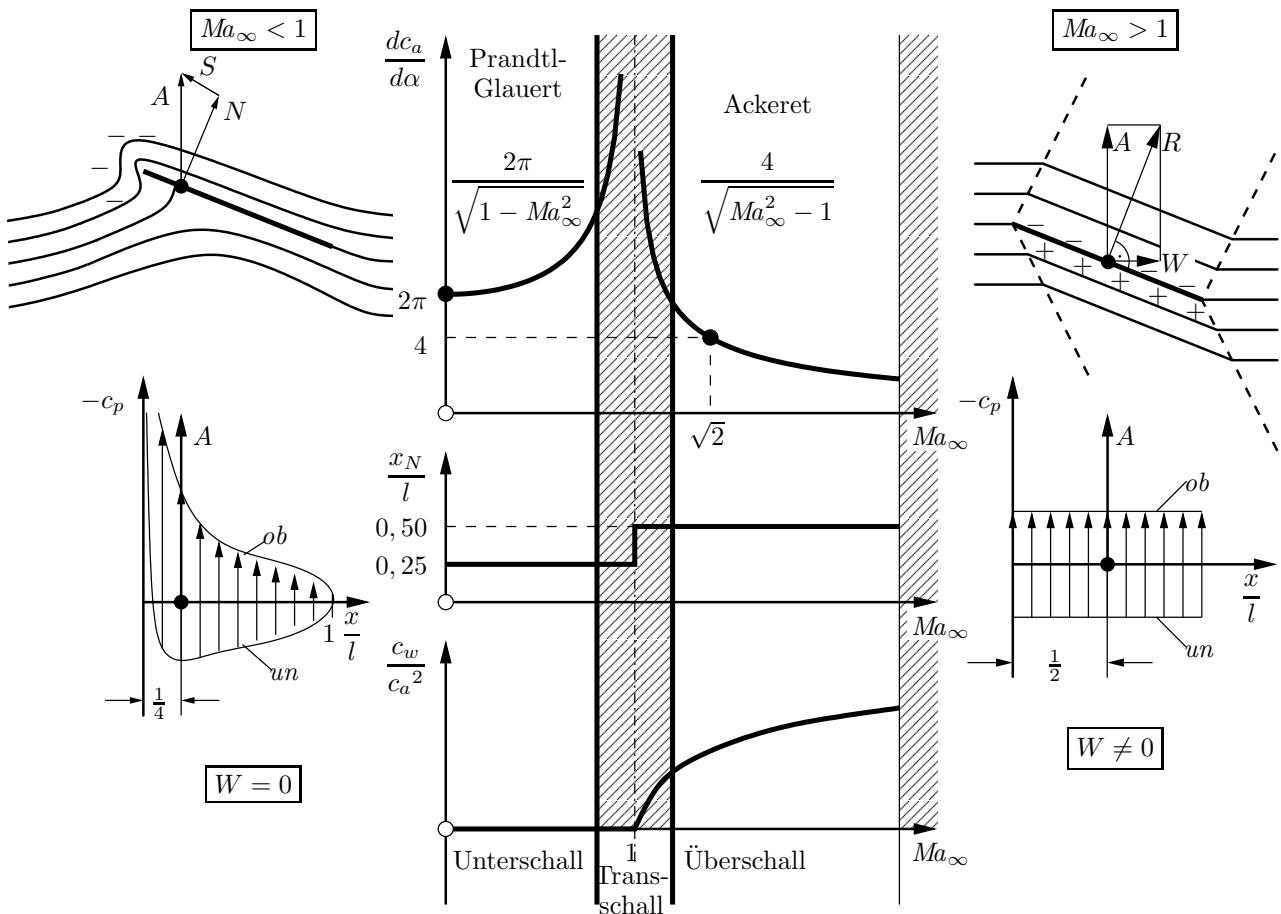
$$M_{Nase} = -A \cdot \frac{l}{2}$$

oder $c_{m_{Nase}} = -\frac{1}{2} c_a$ und $c_{m0} = 0$.

Somit ist die Neutralpunktllage

$$\frac{x_N}{l} = -\frac{dc_{m_{Nase}}}{dc_a} = \frac{1}{2} = \frac{x_D}{l} .$$

Diese Ergebnisse lassen sich in Abhängigkeit von der Machzahl Ma_∞ folgendermaßen darstellen:



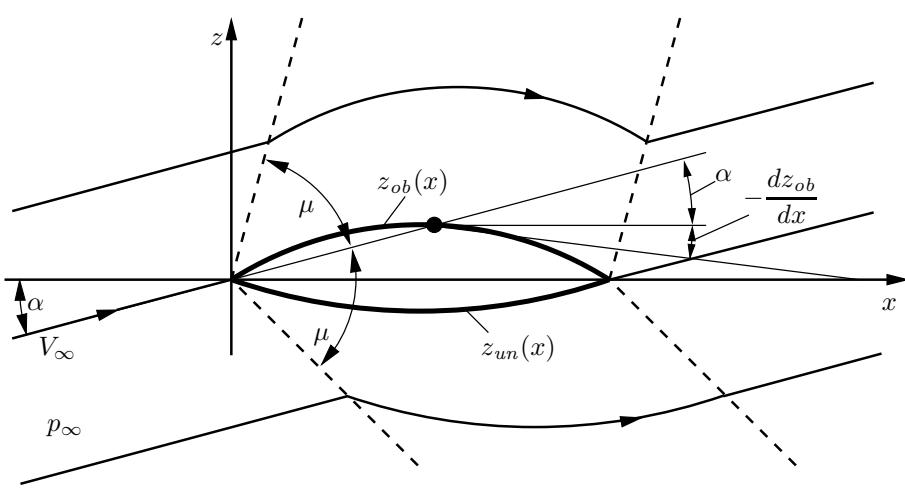
Beim Übergang von Unterschall- zu Überschallströmung verschiebt sich bei der angestellten ebenen Platte der Angriffspunkt der resultierenden Luftkraft von $l/4$ nach $l/2$. Für Überschallflugzeuge resultieren daraus ganz erhebliche Trimmungsprobleme.

Für $Ma_\infty = \sqrt{2}$ ergibt sich für den Auftriebsanstieg $dc_a/d\alpha = 4$, so dass man insgesamt schreiben kann

$$\frac{dc_a}{d\alpha}(Ma_\infty) = \frac{(dc_a/d\alpha)_{Ma_\infty=\sqrt{2}}}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} = \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} .$$

Dies ist die Ackeret'sche Regel, die in den hergeleiteten Ergebnissen automatisch enthalten ist.

3.1.4 Beliebige Profile



Im Folgenden sollen spitznäsig Profile betrachtet werden, bei denen sich an der Vorderkante beidseitig die Strömung um eine flache Ecke ausbildet. Im übrigen gelten die bisherigen

Voraussetzungen für kleine relative Dicke, kleine relative Wölbung und kleine Anstellwinkel.

Grundlage der gesamten Profiltheorie im Überschall ist das Ergebnis, dass der Druck an einer Stelle dem Neigungswinkel ϑ der Strömung an dieser Stelle gegen die Anströmung proportional ist. Damit gilt für die Druckverteilung

$$p_{ob,un} - p_\infty = -2q_\infty(\tan \mu)\vartheta_{ob,un} \quad .$$

Mit den Neigungswinkeln

$$\vartheta_{ob} = \alpha - \frac{dz_{ob}}{dx} \quad \text{und} \quad \vartheta_{un} = -\left(\alpha - \frac{dz_{un}}{dx}\right)$$

folgt

$$c_{p_{ob,un}} = \mp \frac{2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \left(\alpha - \frac{dz_{ob,un}}{dx} \right) \quad . \quad \begin{array}{ll} - & \text{oben} \\ + & \text{unten} \end{array}$$

Spaltet man die Kontur noch auf in Skelett und Tropfen gemäß

$$z_{ob} = z^{(s)} + z^{(t)} \quad \text{und} \quad z_{un} = z^{(s)} - z^{(t)},$$

so ergibt sich für die Differenz der Druckbeiwerte zwischen Unter- und Oberseite

$$\Delta c_p = c_{p_{un}} - c_{p_{ob}} = \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \left(\alpha - \frac{dz^{(s)}}{dx} \right) \quad .$$

Nur Skelettform $z^{(s)}(x)$ und Anstellwinkel α tragen zur Lastverteilung bei. Für den Auftriebsbeiwert erhält man daraus

$$c_a = \int_0^1 \Delta c_p d\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} .$$

Dieses bemerkenswerte Ergebnis besagt, dass im Überschall alle Tragflügelprofile mit gleichem Anstellwinkel (gegen die Profilsehne gemessen) den gleichen Auftriebsbeiwert besitzen. Dicke und Wölbung tragen zum Auftrieb nicht bei. Damit ist für alle Profile der Nullauftriebswinkel

$$\alpha_0 = 0 .$$

Aus der Druckverteilung lässt sich auch das Nickmoment berechnen. Nach einiger Rechnung ergibt sich [3]

$$c_{m_{Nase}} = -\frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \left(\frac{\alpha}{2} + \int_0^1 \frac{z^{(s)}}{l} d\left(\frac{x}{l}\right) \right) ,$$

und damit ist der Nullmomentenbeiwert

$$c_{m0} = c_m(c_a = 0) = c_m(\alpha_0 = 0)$$

$$c_{m0} = -\frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \int_0^1 \frac{z^{(s)}}{l} d\left(\frac{x}{l}\right) .$$

Das Nickmoment ist also auch von der Skelettform abhängig. Für die Druckpunktlage folgt

$$\frac{x_D}{l} = -\frac{dc_{m_{Nase}}}{dc_a} - \frac{c_{m0}}{c_a} = \frac{x_N}{l} - \frac{c_{m0}}{c_a}$$

$$\frac{x_D}{l} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{z^{(s)}}{l} d\left(\frac{x}{l}\right) ,$$

und die Neutralpunktlage ist

$$\frac{x_N}{l} = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \text{für alle Profile, unabhängig} \\ \text{von Dicke und Wölbung.} \end{array}$$

Aus der Druckverteilung ergibt sich auch der Wellenwiderstand

$$c_w = - \int_0^1 (c_{p_{un}} \cdot \vartheta_{un} + c_{p_{ob}} \cdot \vartheta_{ob}) d\left(\frac{x}{l}\right) .$$

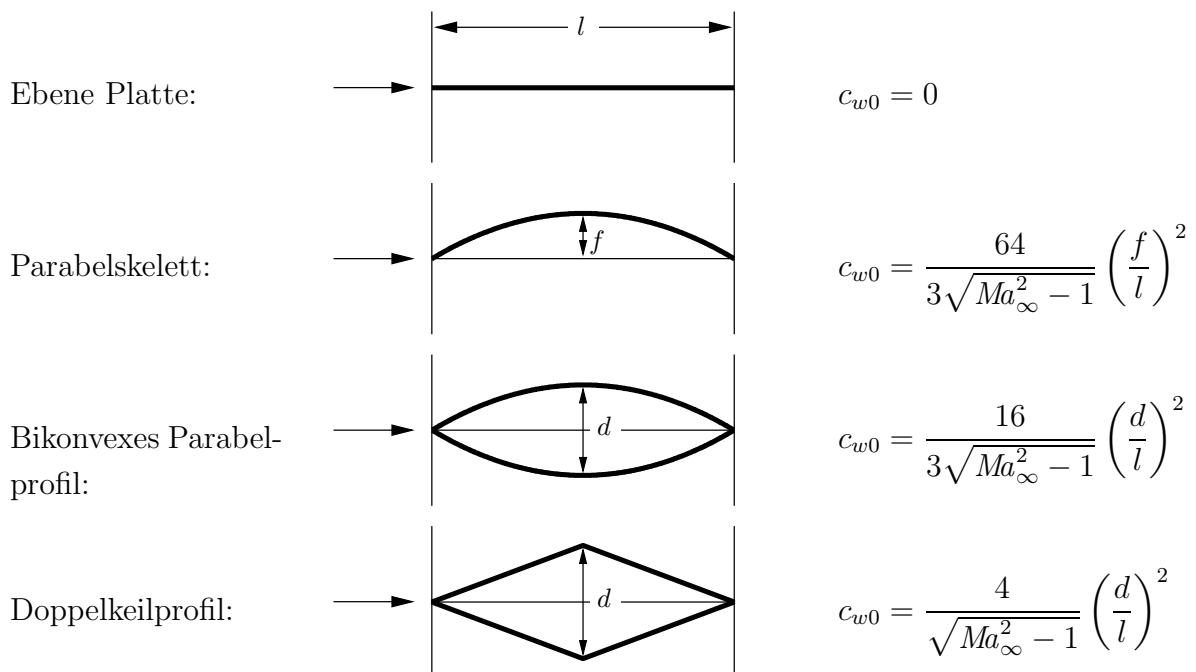
Setzt man auch hier die Neigungswinkel ϑ ein und verwendet man die geometrische Aufspaltung in Skelett und Tropfen, so folgt nach einiger Rechnung [3]

$$c_w = \frac{1}{4} \sqrt{Ma_\infty^2 - 1} \ c_a^2 + c_{w0}$$

mit

$$c_{w0} = \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \left[\int_0^1 \left(\frac{d(z^{(s)}/l)}{d(x/l)} \right)^2 d\left(\frac{x}{l}\right) + \int_0^1 \left(\frac{d(z^{(t)}/l)}{d(x/l)} \right)^2 d\left(\frac{x}{l}\right) \right] .$$

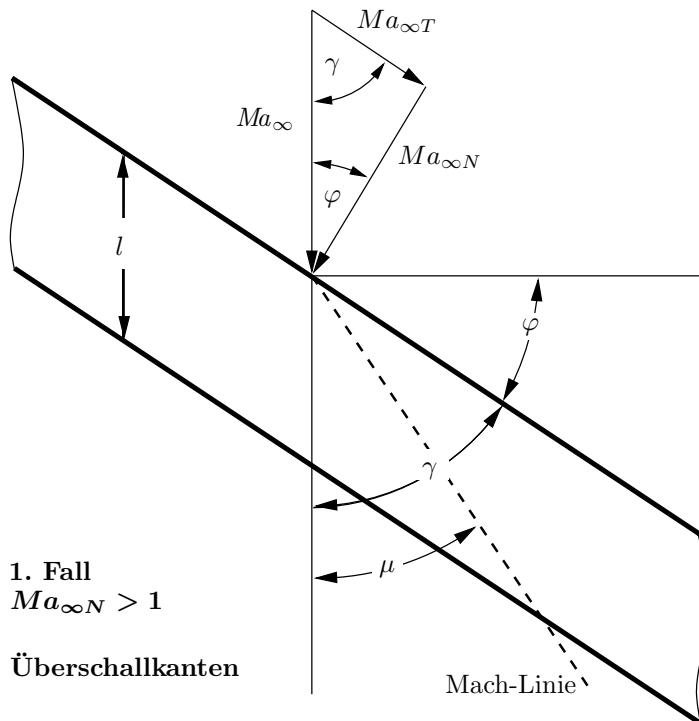
Das erste Glied beschreibt den auftriebsabhängigen Wellenwiderstand. Er ist unabhängig von der Profilform (wie bei der ebenen Platte) und $\sim c_a^2$. Der Nullwiderstandsbeiwert $c_{w0} = c_w(c_a = 0)$ setzt sich aus einem wölbungs- und einem dickenabhängigen Anteil zusammen, die jeweils $\sim (f/l)^2$ bzw. $\sim (d/l)^2$ sind. Wölbung und Dicke tragen somit zum Wellenwiderstand bei Überschallgeschwindigkeit bei. Berechnet man die Nullwiderstandsbeiwerte für einige Profile im Überschall, so folgt für



Dabei ist bemerkenswert, dass der Wert für das Doppelkeilprofil für vorgegebene relative Dicke d/l das Minimum darstellt. Bezuglich des Wellenwiderstandes bei Nullauftrieb ist daher das Doppelkeilprofil das günstigste Überschallprofil.

3.1.5 Gepfeilte Flügel $\Lambda \rightarrow \infty$

Betrachtet wird ein gepfeilter Flügel (Profil ebene Platte) im Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$.



Der Pfeilungswinkel von Vorder- und Hinterkante sei φ , der zugehörige Körperwinkel ist dann

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi .$$

Die Überschallanströmung $Ma_\infty > 1$ lässt sich zerlegen in die Komponenten normal und tangential zu den beiden Kanten

$$\begin{aligned} Ma_{\infty N} &= Ma_\infty \cos \varphi = Ma_\infty \sin \gamma \\ Ma_{\infty T} &= Ma_\infty \sin \varphi = Ma_\infty \cos \gamma . \end{aligned}$$

Die Größe der Normalkomponente $Ma_{\infty N}$ bestimmt die Art der Umströmung des Flügels, denn durch die vektorielle Addition einer ungestörten und daher überall konstanten Tangentialkomponente ändert sich der Strömungstypus nicht. Bei der Komponentenzerlegung können nun zwei Fälle auftreten, nämlich

- a) $Ma_{\infty N} > 1$: Die Machzahlkomponente senkrecht zu beiden Kanten liegt im Überschallbereich. In diesem Fall ist dann mit $Ma_\infty = 1/\sin \mu$

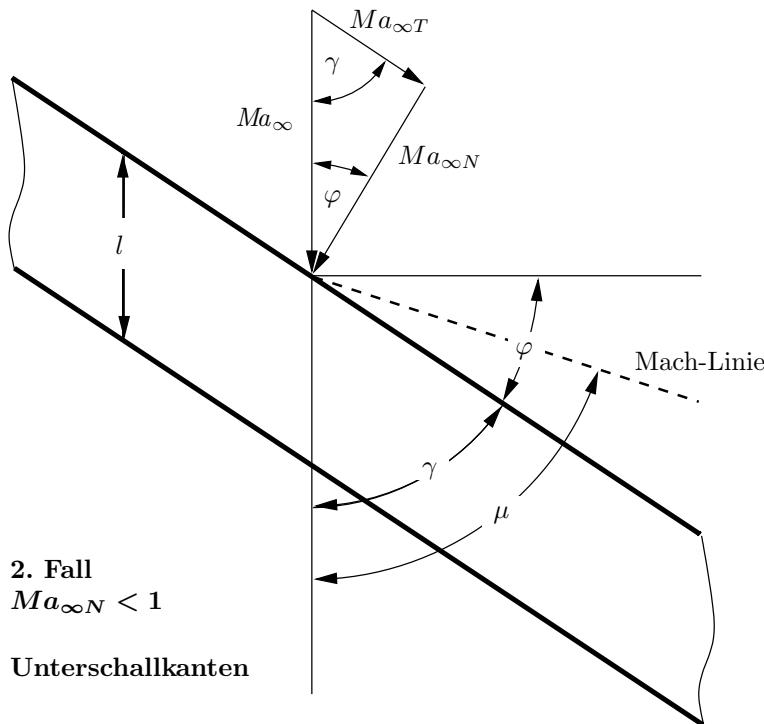
$$Ma_{\infty N} = Ma_\infty \sin \gamma > 1$$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \mu} > 1 ; \quad \text{also } \gamma > \mu .$$

Die Mach'schen Linien sind damit wie gezeichnet stärker gepfeilt als die Körperkanten. Dies ist der Fall von **Überschallkanten**. Die Machzahlkomponente senkrecht zu

den Kanten liegt im Überschallbereich. Der Strömungstyp entspricht dem bei einer angestellten ebenen Platte im Überschall mit konstanter Verteilung der Druckdifferenz zwischen Unter- und Oberseite längs der Flügeltiefe.

b) $Ma_{\infty N} < 1$:



einer angestellten ebenen Platte im Unterschall mit einer Verteilung der Druckdifferenz zwischen Unter- und Oberseite entsprechend der 1. Birnbaum'schen Normalverteilung. Es gibt also Überschallströmungen, die vom Strömungsablauf her wie Unterschallströmungen aussehen.

Bei der Behandlung von Tragflügeln endlicher Spannweite können nun sowohl Überschall- als auch Unterschallkanten vorliegen. Mit den Bezeichnungen

Unterschallvorderkante	UVK
Überschallvorderkante	ÜVK
Unterschallhinterkante	UHK
Überschallhinterkante	ÜHK

sind im Folgenden die bei Tragflügeln endlicher Streckung auftretenden Kombinationen skizziert und jeweils eine typische Differenzdruckverteilung und der zugehörige Strömungsverlauf für einen Schnitt $y = \text{const.}$ schematisch angegeben.

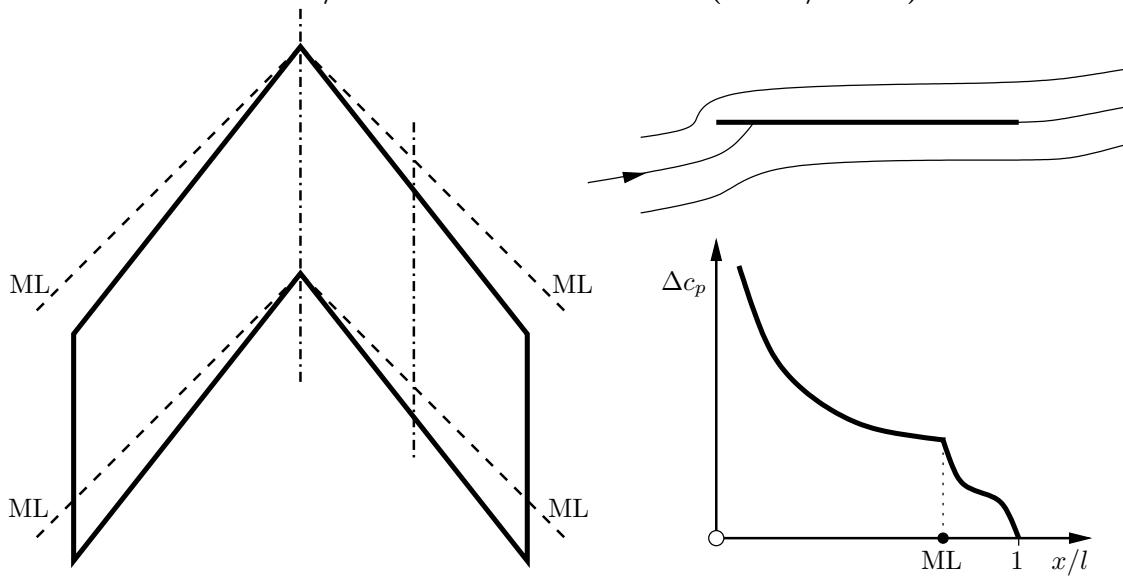
Dabei ist zu bedenken, dass an einer auf dem Flügel verlaufenden Mach'schen Linie (M.L.) Unstetigkeiten im Druckverlauf auftreten können. Die verschiedenen Kombinationen sind:

Die Machzahlkomponente senkrecht zu beiden Kanten liegt im Unterschallbereich. Dann ist

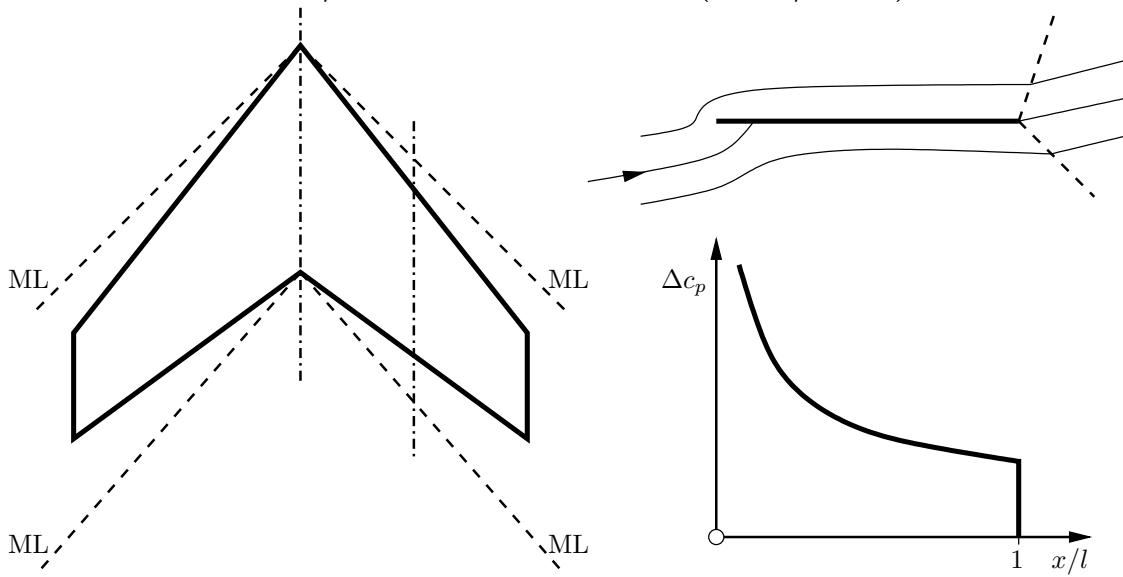
$$\frac{\sin \gamma}{\sin \mu} < 1; \text{ also } \gamma < \mu .$$

Die Mach'schen Linien sind schwächer gepfeilt als die Körperkanten. Dies ist der Fall von **Unterschallkanten**. Obwohl eine Überschallströmung vorliegt, erfolgt die Anströmung senkrecht zur Vorderkante mit Unterschallgeschwindigkeit. Der Strömungstyp entspricht deshalb dem bei

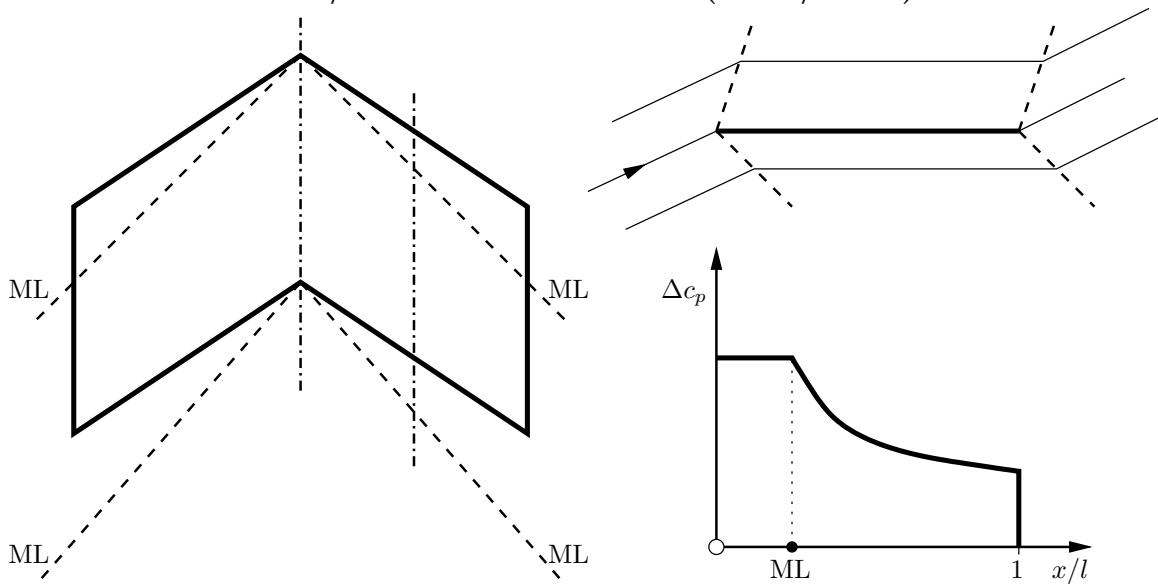
1) Unterschallvorderkante/Unterschallhinterkante (UVK/UHK)



2) Unterschallvorderkante/Überschallhinterkante (UVK/ÜHK)

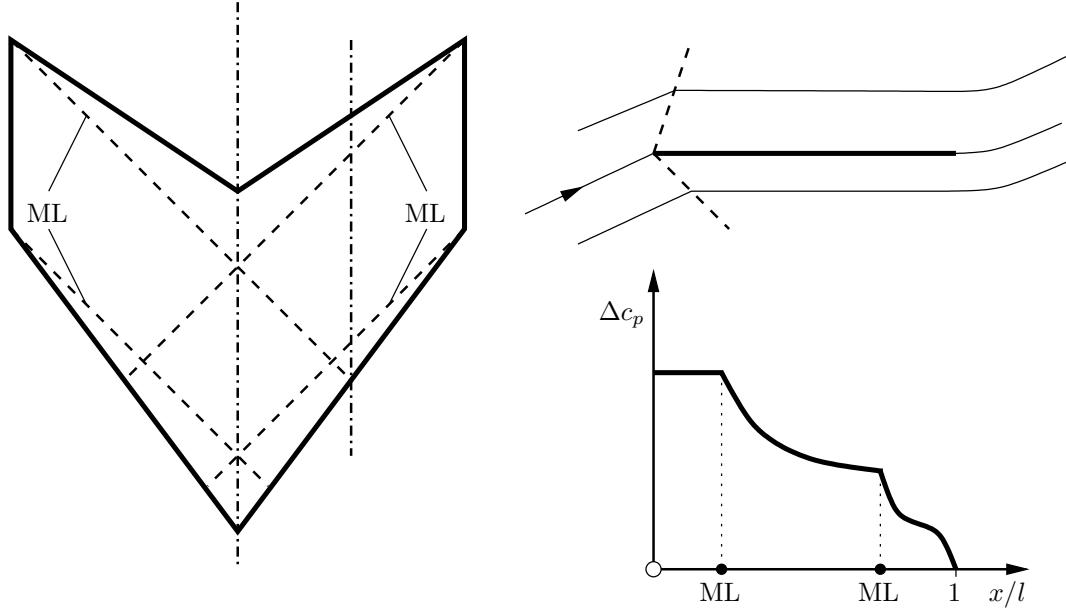


3) Überschallvorderkante/Überschallhinterkante (ÜVK/ÜHK)



4) Überschallvorderkante/Unterschallhinterkante (ÜVK/UHK)

Bei rückwärtsgepfeilten Flügeln führt diese Kombination zu Flügeln mit nach außen zunehmender Flügeltiefe. Dies kommt im Hinblick auf strukturelle Gesichtspunkte nicht in Frage. Die genannte Kombination tritt jedoch bei vorwärts gepfeilten Flügeln auf:



Bei der Behandlung von 3D-Tragflügeln sind solche Strömungsverhältnisse zu erwarten. Im Folgenden sollen nun derartige 3D-Strömungen berechnet werden.

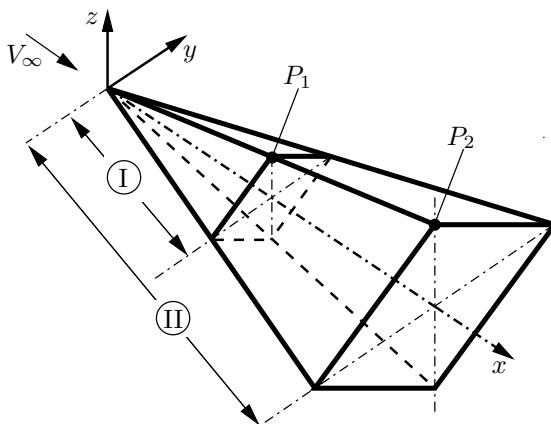
3.2 Kegelsymmetrische Überschallströmungen

3.2.1 Grundbegriffe

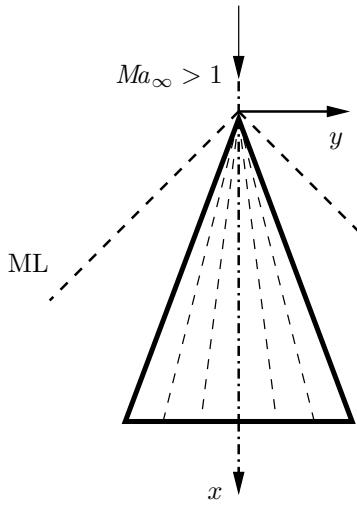
Kegelsymmetrische (konische) Überschallströmungen sind spezielle Überschallströmungen, bei denen der Strömungszustand, also Druck und Geschwindigkeit nach Größe und Richtung, auf Strahlen durch einen Punkt (Kegelspitze) konstant ist. Voraussetzung dafür ist, dass auch die Randbedingungen am Körper kegelig sind oder dass bei nichtkegeligen Körpern wenigstens bereichsweise kegelige Randbedingungen vorliegen, so dass die Strömung aus kegeligen Feldern zusammengesetzt werden kann.

Beispiele hierfür sind

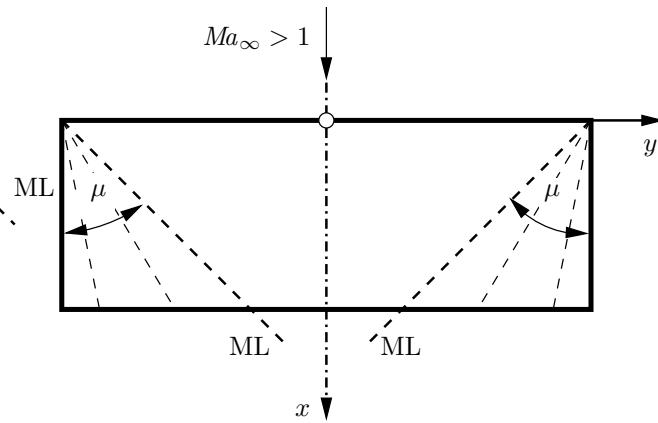
a) Nichtangestellter Kegel



b) Angestellter Deltaflügel



c) Rechteckflügel



Die Me-

thode, Druckverteilungen bereichsweise aus denen kegeliger Felder zusammenzusetzen, ist notwendigerweise beschränkt. Sie ist nur im Überschall anwendbar, und sie besitzt im Unterschall kein Analogon. Die Voraussetzungen für die Existenz kegelsymmetrischer Strömungen lassen sich folgendermaßen herleiten: Betrachtet sei ein Kegel entsprechend der Figur. Die daraus zu bildenden Körper I (kurz) und Körper II (lang) sind geometrisch ähnlich. Nach dem Mach'schen Ähnlichkeitsgesetz sind damit auch die Strömungen um beide Körper bei $Ma_\infty = \text{const.}$ mechanisch ähnlich. Dies bedeutet für die Strömungsgeschwindigkeit \vec{V}

$$\left(\frac{\vec{V}(P_2)}{V_\infty} \right)_{\text{Körper } II} = \left(\frac{\vec{V}(P_1)}{V_\infty} \right)_{\text{Körper } I} .$$

Diese Aussage gilt bei kompressibler Strömung sowohl im Unterschall ($Ma_\infty < 1$) als auch im Überschall ($Ma_\infty > 1$). Betrachtet sei nun der Körper II bei Überschallanströmung, $Ma_\infty > 1$. In diesem Fall ändert sich der Strömungszustand am vorderen Teil des Körpers nicht, wenn man den Körper bei P_1 abschneidet, weil sich bei $Ma_\infty > 1$ Störungen stromaufwärts nicht fortpflanzen können. Damit gilt

$$\left(\frac{\vec{V}(P_1)}{V_\infty} \right)_{\text{Körper } II} = \left(\frac{\vec{V}(P_1)}{V_\infty} \right)_{\text{Körper } I} .$$

Diese Aussage gilt nur im Überschall. Aus beiden Gleichungen folgt

$$\left(\frac{\vec{V}(P_2)}{V_\infty} \right)_{\text{Körper } II} = \left(\frac{\vec{V}(P_1)}{V_\infty} \right)_{\text{Körper } II} .$$

Damit ist der Strömungszustand auf dem Strahl durch die Kegelspitze, der P_1 und P_2 verbindet, konstant. Der betrachtete Fahrstrahl sowie die Lage des Punktes P_1 auf ihm sind ganz beliebig. Mithin ist der Strömungszustand auf allen Fahrstrahlen durch die Kegelspitze konstant, jedoch natürlich von Fahrstrahl zu Fahrstrahl verschieden. Eine solche Strömung nennt man eine kegelsymmetrische (konische) Strömung. Sie existiert nur im Überschall.

3.2.2 Die Transformation von Busemann

Für alle Überschallmachzahlen $1,2 \leq Ma_\infty \leq 3$ ist mit Hilfe der Göthert'schen Regel eine Transformation des Problems auf $Ma_\infty = \sqrt{2}$ möglich. Deshalb soll im Folgenden nur dieser Fall betrachtet werden. Die zu lösende Potentialgleichung für 3D–Strömung lautet dann

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0 \quad .$$

Zur Lösung dieser Gleichung werden Kegelkoordinaten η, ζ mit dem Ursprung in der Kegelspitze

$$\boxed{\eta = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{z}{x}}$$

eingeführt. Jeder Strahl ist somit durch ein Wertepaar η, ζ festgelegt. Für die Ableitungen gilt

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{\eta}{x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{z}{x^2} = -\frac{\zeta}{x} \quad .$$

Der kegelsymmetrische Charakter des Strömungsfeldes ist in einem Ansatz für das Störpotential φ zu formulieren. Auf einem Fahrstrahl (η, ζ) sind die Komponenten der Störgeschwindigkeit u, v, w , damit auch der Geschwindigkeitsvektor nach Größe und Richtung sowie der Druckbeiwert c_p jeweils konstant. Das Störpotential φ ist dagegen auf dem Fahrstrahl (η, ζ) nicht konstant, weil ja für die Störgeschwindigkeit \vec{v}

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi$$

gilt. Mithin muss φ eine lineare Funktion von x sein, und der Ansatz für das Störpotential einer kegelsymmetrischen Strömung lautet

$$\boxed{\varphi = x \cdot f(\eta, \zeta) \quad .}$$

Daraus folgt für die Störgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned}
 u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= f(\eta, \zeta) + x \frac{\partial f}{\partial x} \\
 &= f(\eta, \zeta) + x \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \\
 &= f(\eta, \zeta) - x \left(f_\eta \frac{\eta}{x} + f_\zeta \frac{\zeta}{x} \right) \\
 u(\eta, \zeta) &= f(\eta, \zeta) - \eta f_\eta(\eta, \zeta) - \zeta f_\zeta(\eta, \zeta) \\
 v(\eta, \zeta) &= x \cdot f_\eta \cdot \frac{1}{x} = f_\eta(\eta, \zeta) \\
 w(\eta, \zeta) &= x \cdot f_\zeta \cdot \frac{1}{x} = f_\zeta(\eta, \zeta) .
 \end{aligned}$$

Aus dem gewählten Ansatz folgt, dass die Störgeschwindigkeiten unabhängig von x und auf einem Fahrstrahl (η, ζ) konstant sind. Auch der Druckbeiwert ist dann wegen $c_p = -2u/V_\infty$ auf dem Fahrstrahl konstant.

Für die weiteren partiellen Ableitungen folgt

$$\begin{aligned}
 \varphi_{xx} &= u_x = u_\eta \cdot \eta_x + u_\zeta \cdot \zeta_x \\
 &= -(f_\eta - f_\eta - \eta f_{\eta\eta} - \zeta f_{\zeta\eta}) \frac{\eta}{x} - (f_\zeta - \eta f_{\eta\zeta} - f_\zeta - \zeta f_{\zeta\zeta}) \frac{\zeta}{x} \\
 \varphi_{xx} &= \frac{1}{x} (\eta^2 f_{\eta\eta} + 2\eta\zeta f_{\eta\zeta} + \zeta^2 f_{\zeta\zeta}) \\
 \varphi_{yy} &= \frac{1}{x} f_{\eta\eta} \\
 \varphi_{zz} &= \frac{1}{x} f_{\zeta\zeta} .
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Ergebnisse aus dem Ansatz in die Potentialgleichung ein, so folgt

$$\boxed{(1 - \eta^2) f_{\eta\eta} - 2\eta\zeta f_{\eta\zeta} + (1 - \zeta^2) f_{\zeta\zeta} = 0} .$$

Die hier durchgeführte Transformation stammt von Busemann (1942). Für kegelsymmetrische Strömungen wird das 3D–Problem auf ein 2D–Problem in der η – ζ –Ebene zurückgeführt. Dort ist eine lineare partielle Differentialgleichung für die Funktion $f(\eta, \zeta)$ zu lösen.

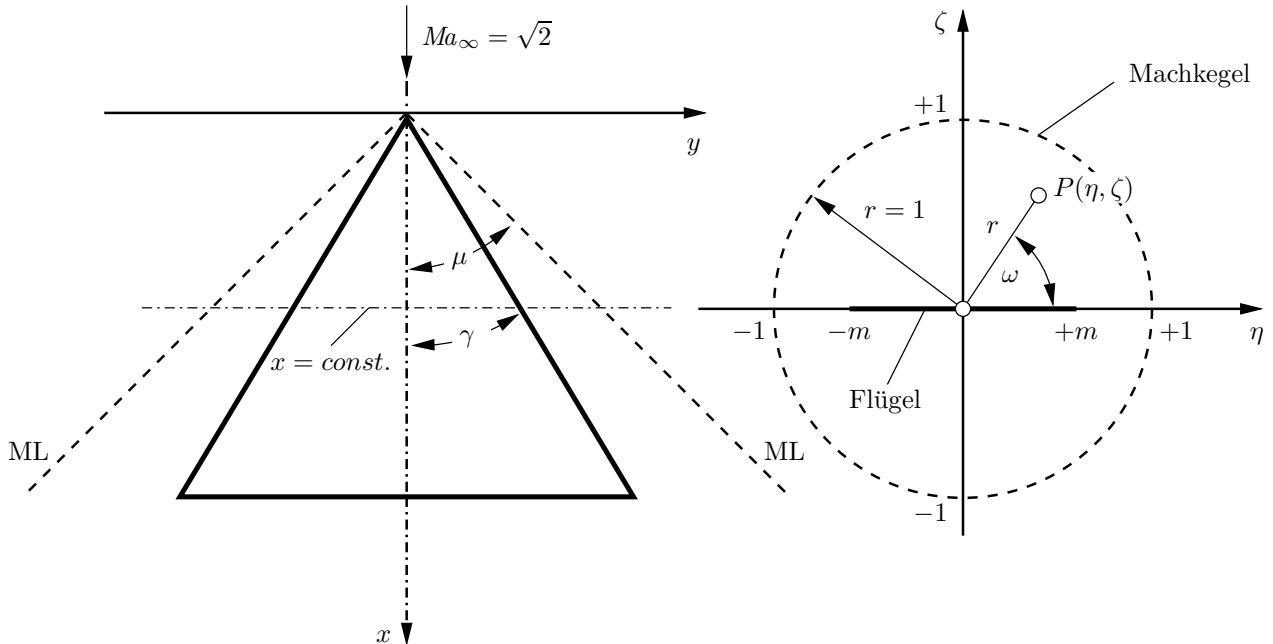
Die Verhältnisse in der η – ζ –Ebene lassen sich folgendermaßen darstellen. Es sei die Strömung um einen Deltaflügel mit Unterschallvorderkanten betrachtet. Bei $Ma_\infty = \sqrt{2}$ gilt

$$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} = 1$$

und die Mach'schen Linien (ML) verlaufen unter $\mu = 45^\circ$. Mit dem Körperwinkel γ ist das Verhältnis

$$m = \frac{\tan \gamma}{\tan \mu} = \tan \gamma .$$

Ebene $x = const.$



Die η – ζ –Ebene stellt die Querschnittsebene senkrecht zur Anströmung für beliebige Stellen $x = const.$ dar. Wegen $Ma_\infty = \sqrt{2}$, $\mu = 45^\circ$ ist der Machkegel in der η – ζ –Ebene ein Kreis mit dem Radius $r = 1$. Der Deltaflügel mit Unterschallvorderkante erstreckt sich für kleine Anstellwinkel näherungsweise auf der Abzisse im Bereich $-m \leq \eta \leq +m$. Die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung ist für folgende Randbedingungen zu lösen:

Am Körper gilt die kinematische Strömungsbedingung. Sie lautet für einen angestellten ebenen Plattenflügel

$$\zeta = 0; \quad -m \leq \eta \leq +m \quad : \quad w = -\alpha V_\infty = const.$$

Weit weg müssen die Störungen abgeklungen sein. Im Überschall ist diese Bedingung jedoch nicht im Unendlichen, sondern schon auf dem Machkegel erreicht, weil Störungen den Bereich außerhalb des Machkegels nicht erreichen können. Damit gilt auf dem Machkegel

$$\eta^2 + \zeta^2 = 1 \quad : \quad u = v = w = 0 \quad .$$

3.2.3 Die Transformationen von Tschaplygin und Germain

Zur weiteren Behandlung des 2D-Problems lässt sich die $\eta-\zeta$ -Ebene als komplexe Zahlenebene ϵ auffassen, und es ist

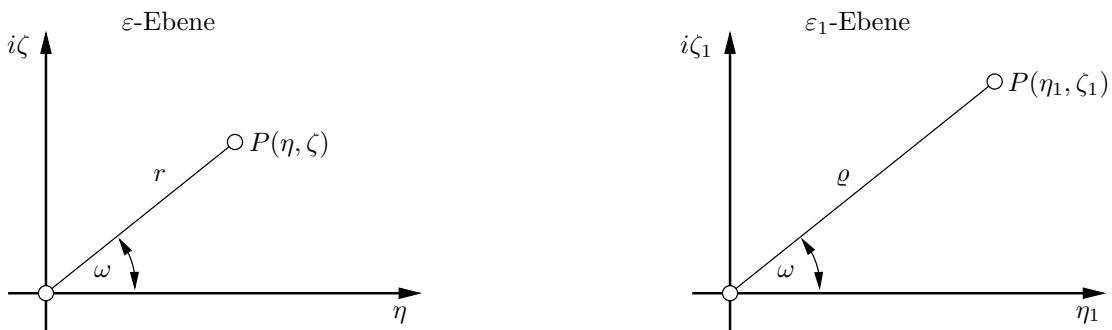
$$\epsilon = \eta + i\zeta = re^{i\omega} \quad .$$

Durch eine Koordinatentransformation nach Tschaplygin kann auf eine neue komplexe Zahlenebene

$$\epsilon_1 = \eta_1 + i\zeta_1 = \varrho e^{i\omega}$$

übergegangen werden. Dabei bleibt der Winkel ω , und für die Radien gilt die Umrechnung

$$\varrho = \frac{1 - \sqrt{1 - r^2}}{r} \quad \text{oder} \quad r = \frac{2\varrho}{1 + \varrho^2} \quad .$$



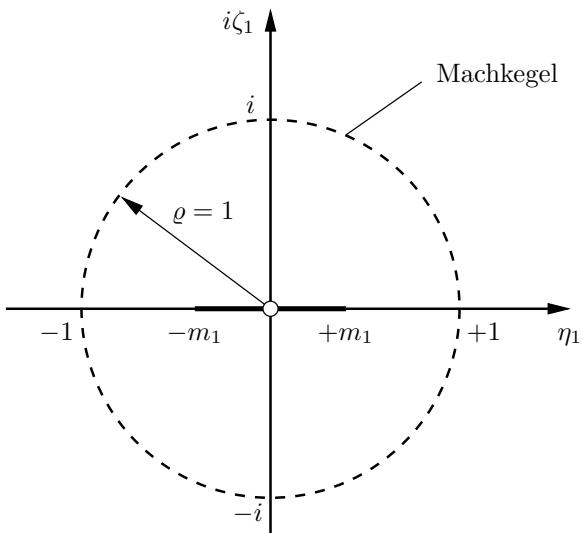
Durch diese Transformation ergibt sich für den Machkegel $r = 1$ der neue Radius $\varrho = 1$; der Machkegel bleibt also unverändert. Der Flügel bleibt wegen $\omega = \text{const.}$ auf der reellen

Achse, aber seine Spannweite verändert sich. Es ist

$$m_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{m} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - m^2}}{1 + \sqrt{1 - m^2}}$$

$$m_1 = \frac{1 - 1 + m^2}{m(1 + \sqrt{1 - m^2})}$$

$$m_1 = \frac{m}{1 + \sqrt{1 - m^2}} .$$



Die Randbedingungen auf dem Flügel sind also an veränderter Stelle zu erfüllen. Durch die Transformation geht die Differentialgleichung für $f(\eta_1, \zeta_1)$ in eine neue

Gleichung für die neue Funktion $f(\eta_1, \zeta_1)$ über. Geht man vom Störpotential φ auf die Störgeschwindigkeiten u, v, w zurück, so zerfällt die Potentialgleichung wieder in drei Gleichungen für die drei Geschwindigkeitskomponenten. Dabei ergibt sich (ohne Beweis):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_1^2} = \nabla^2 u = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta_1^2} = \nabla^2 v = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta_1^2} = \nabla^2 w = 0 .$$

Als Ergebnis der Tschaplygin–Transformation erhält man also die Laplacegleichung für alle drei Geschwindigkeitskomponenten. Diese sind natürlich über die Bedingung der Drehsungsfreiheit miteinander gekoppelt.

Zur weiteren Behandlung des Problems kann eine erneute Transformation vorgenommen werden, die auf Germain zurückgeht. Sie lautet

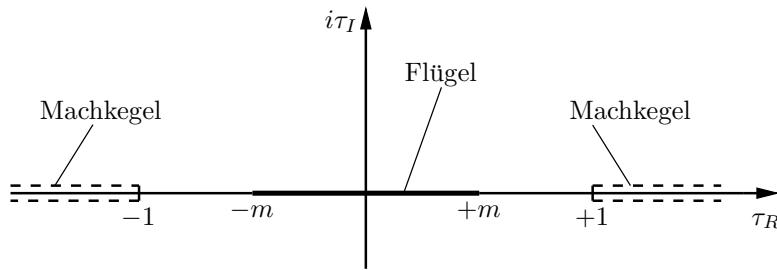
$$\tau = \tau_R + i\tau_I = \frac{2\epsilon_1}{1 + \epsilon_1^2} = \frac{2\varrho e^{i\omega}}{1 + \varrho^2 e^{i2\omega}} .$$

Mit dieser Transformation ergibt sich für den Machkegel $\varrho = 1$

$$\tau = \frac{2e^{i\omega}}{1 + e^{i2\omega}} = \frac{2}{e^{-i\omega} + e^{i\omega}}$$

$$\tau = \frac{2}{\cos \omega - i \sin \omega + \cos \omega + i \sin \omega} = \frac{1}{\cos \omega} .$$

Der Machkegel wird also auf die reelle Achse in den Bereichen $\tau_R \leq -1$ und $\tau_R \geq 1$ transformiert. Die gesamte τ -Ebene stellt das Innere des Machkegels dar.



Für die Lage der Vorderkante des Flügels ergibt sich für $\omega = 0$

$$\tau = \frac{2\varrho}{1 + \varrho^2} = r(\omega = 0) = \eta \quad .$$

Der Flügel liegt also auf der reellen Achse und seine ursprüngliche Spannweite $2m$ in der ϵ -Ebene bleibt erhalten. Der Flügel hat also wieder die ehemalige Größe. Von Germain wurde gezeigt, dass in der neuen τ -Ebene die Laplacegleichungen für die Störgeschwindigkeiten unverändert erhalten bleiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_R^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_I^2} &= \nabla^2 u = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \tau_R^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \tau_I^2} &= \nabla^2 v = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_R^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_I^2} &= \nabla^2 w = 0 \quad . \end{aligned}$$

In dieser Fassung lassen sich die Randbedingungen einfacher formulieren. Die Lösungen dieser Laplacegleichungen sind nicht voneinander unabhängig. Vielmehr bestehen zwischen den Komponenten der Störgeschwindigkeiten Querverbindungen, die aus der Bedingung der Drehungsfreiheit

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

herrühren. Dies sind die Verträglichkeitsbedingungen.

Für die Lösung der gekoppelten Laplacegleichungen existieren viele analytische Lösungen für die verschiedensten Randbedingungen. Die Methoden zur Berechnung dieser Lösungen sind sehr unterschiedlich. Sie sollen hier im einzelnen nicht behandelt werden. Es ist das Verdienst von

A.F. Donovan, H.R. Lawrence (ed.): Aerodynamic Components of Aircraft at High Speed. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. VII, Princeton University Press, 1957,

diese Lösungen aus den Originalarbeiten gesammelt und in einheitlicher Darstellung zusammengefasst zu haben. Diese bedient sich der Funktionentheorie (vgl. Vorlesung Aerodynamik II, Kapitel „konforme Abbildung“). Bei jeder analytischen komplexen Funktion

$$g(\tau) = R(\tau_R, \tau_I) + iI(\tau_R, \tau_I)$$

erfüllen Realteil (R) und Imaginärteil (I) die Laplacegleichung. Zur Lösung der gekoppelten Laplacegleichungen sind also analytische Funktionen zu finden, welche die Randbedingungen

- auf dem Flügel $(-m \leq \tau_R \leq +m; \tau_I = 0)$: $w = -\alpha V_\infty$
- auf dem Machkegel $(\tau_R \leq -1, \tau_R \geq +1, \tau_I = 0)$: $u = v = w = 0$

und die Verträglichkeitsbedingungen erfüllen. Die gesuchten analytischen Funktionen sind

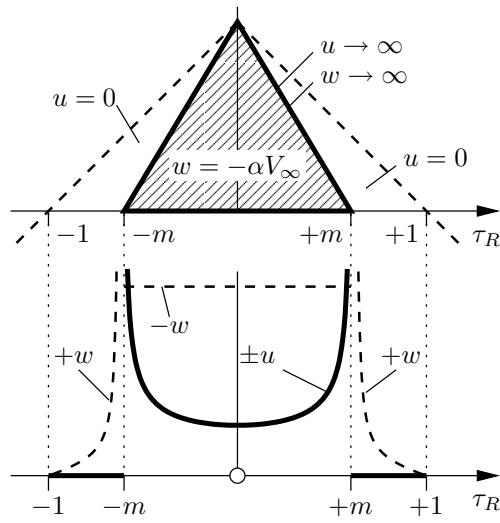
$$\begin{aligned}\hat{U}(\tau) &= u(\tau_R, \tau_I) + iu'(\tau_R, \tau_I) ; \quad u = \Re(\hat{U}(\tau)) \\ \hat{V}(\tau) &= v(\tau_R, \tau_I) + iv'(\tau_R, \tau_I) ; \quad v = \Re(\hat{V}(\tau)) \\ \hat{W}(\tau) &= w(\tau_R, \tau_I) + iw'(\tau_R, \tau_I) ; \quad w = \Re(\hat{W}(\tau)) .\end{aligned}$$

Die Realteile sind die gesuchten Störgeschwindigkeiten, die Imaginärteile u', v', w' sind ohne physikalische Bedeutung. Die Verträglichkeitsbedingungen lassen sich überführen in

$$d\hat{U} = -\tau d\hat{V} = \frac{i\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} d\hat{W} .$$

In dem genannten Buch sind in einheitlicher Darstellung die analytischen komplexen Funktionen bzw. ihre Realteile für viele Beispiele zusammengefasst. Im Folgenden sind daraus wichtige Lösungen wiedergegeben, die dann im nächsten Abschnitt im einzelnen untersucht werden sollen.

Grundlösungen für kegelsymmetrische Überschallströmungen

Deltaflügel mit Unterschallvorderkanten, $m < 1$ 

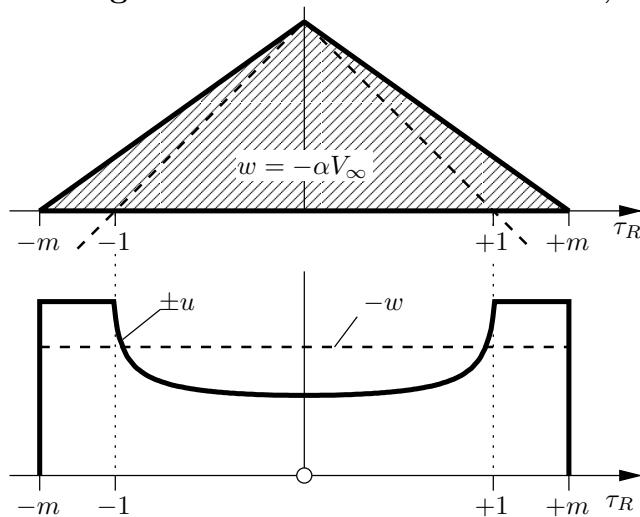
$$u = \Re \left[\frac{m^2 \alpha V_\infty}{\beta E(k)} \frac{1}{\sqrt{m^2 - \tau^2}} \right]$$

$$w = \Re \left[\frac{\alpha V_\infty}{\beta E(k)} \left(\tau \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\tau^2 - m^2}} - E(\vartheta, k) \right) \right]$$

$E(k)$ = vollständiges elliptisches Integral 2. Gattung

$E(\vartheta, k)$ = unvollständiges elliptisches Integral 2. Gattung

$$\vartheta = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{1 - m^2}} ; k = \sqrt{1 - m^2}$$

Deltaflügel mit Überschallvorderkanten, $m > 1$ 

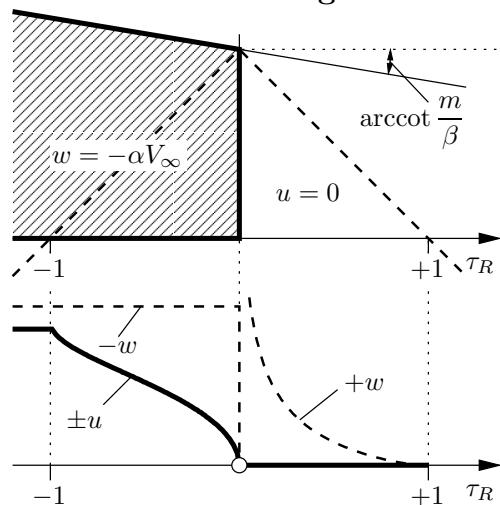
$$u = \pm \Re \left[\frac{\alpha V_\infty}{\beta \pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\arccos \frac{1 - m\tau}{m - \tau} + \arccos \frac{1 + m\tau}{m + \tau} \right) \right]$$

$$u = \pm \Re \left[\frac{\alpha V_\infty}{\beta \pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} 2 \arccos \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{m^2 - \tau^2}} \right]$$

$$w = \pm \Re \left[i \frac{\alpha V_\infty}{\beta \pi} \ln \frac{\tau + m}{\tau - m} \right] .$$

Seitenkante eines Flügels mit Überschallvorderkante



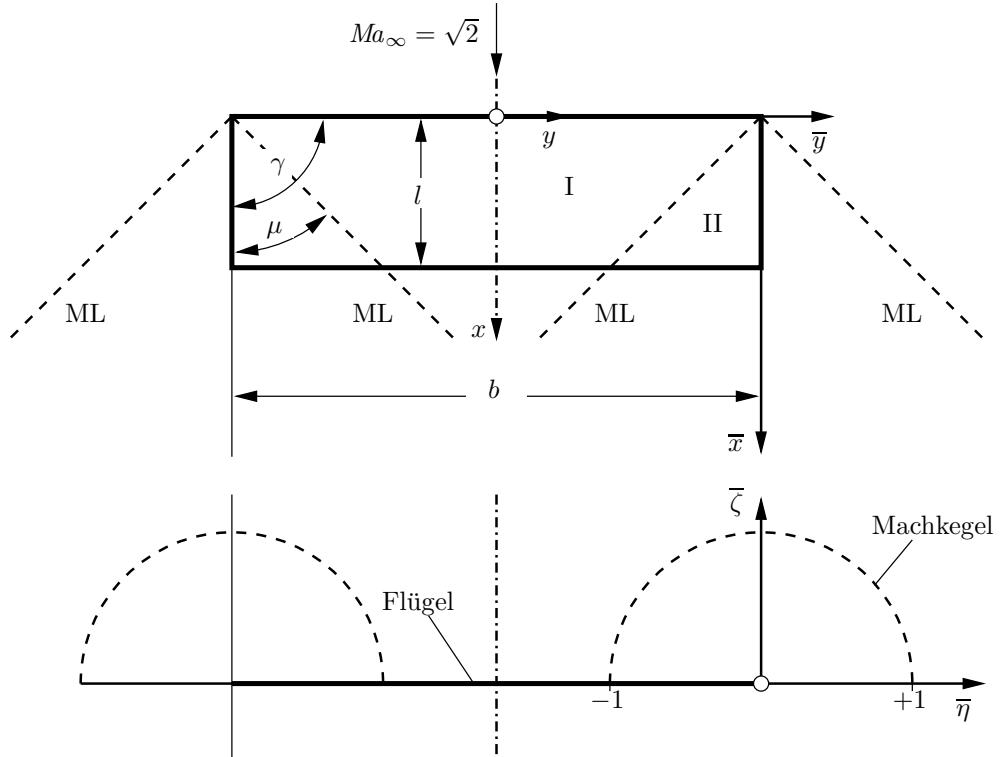
$$u = \Re \left[\frac{2m\alpha V_\infty}{\beta \pi \sqrt{m^2 - 1}} \arctan \sqrt{\frac{-(1+m)\tau}{m(1+\tau)}} \right]$$

$$w = \Re \left[\frac{2\alpha}{\beta \pi} V_\infty \left(\sqrt{\frac{m(1-\tau)}{\tau(m-1)}} - \arctan \sqrt{\frac{m(1-\tau)}{\tau(m-1)}} \right) \right]$$

$$m = \frac{\tan \gamma}{\tan \mu}, \quad \beta = \sqrt{Ma_\infty^2 - 1}$$

Aus: A.F. Donovan, H.R. Lawrence (ed.): Aerodynamic Components of Aircraft at High Speed. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. VII, Princeton University Press, 1957.

3.2.4 Rechteckflügel



Es wird ein angestellter Plattenflügel (Anstellwinkel α) mit dem Seitenverhältnis $\Lambda = b/l$ betrachtet, der mit $Ma_\infty = \sqrt{2}$ angeströmt wird. Im Mittenbereich verhält sich der Flügel wie bei 2D–Strömung, weil sich die vom Flügelrand ausgehende Störung nur innerhalb des Machkegels am Flügelende auswirken kann. Im Bereich I herrscht konstanter Druck, und für den Druckbeiwert gilt

$$c_{p_I} = c_{p_{eb}} = \mp 2\alpha \quad (Ma_\infty = \sqrt{2}) \quad .$$

In den Außenbereichen liegt eine kegelsymmetrische Strömung mit der Kegelspitze in der Vorderkante am Flügelende vor. Die Vorderkante des Flügels ist eine Überschallvorderkante mit dem Körperwinkel $\gamma = \frac{\pi}{2}$ und $m = \tan \gamma / \tan \mu = \infty$. Für die kegelsymmetrische Strömung im Außenbereich lautet die Lösung ($m = \infty$, $\beta = \sqrt{Ma_\infty^2 - 1} = 1$)

$$\begin{aligned} u &= \Re \left[\frac{2\alpha V_\infty}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{-\tau}{1+\tau}} \right] \\ w &= \Re \left[\frac{2\alpha V_\infty}{\pi} \left(\sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} - \arctan \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \right) \right] \quad . \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{m} = 1 \quad .$$

Auf dem Flügel $-1 \leq \tau_R \leq 0; \tau_I = 0$ ist der Ausdruck $\sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}}$ rein imaginär. Dort ergibt sich weiter mit $\arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned}\arctan \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} &= \arccos i\sqrt{-\tau} \\ &= \frac{\pi}{2} \pm i \ln (\sqrt{-\tau} + \sqrt{1-\tau}) ,\end{aligned}$$

wobei der Klammerausdruck auf dem Flügel rein reell ist. Damit folgt aus der Lösung für w auf dem Flügel

$$w = \frac{2\alpha V_\infty}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\alpha V_\infty .$$

Damit ist gezeigt, dass die angegebene Lösung für w auf dem Flügel die kinematische Strömungsbedingung erfüllt.

Benutzt man in der Lösung für u die allgemeine Beziehung

$$\arctan x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} ,$$

so ergibt sich

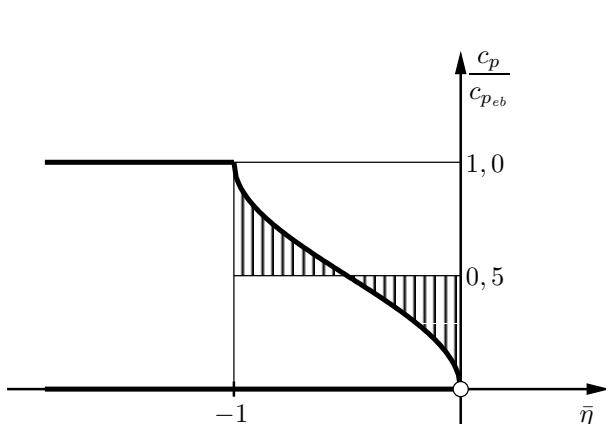
$$\begin{aligned}u &= \pm \frac{2\alpha V_\infty}{\pi} \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \frac{-\tau}{1+\tau}}{1 + \frac{-\tau}{1+\tau}} \\ u &= \pm \frac{\alpha V_\infty}{\pi} \arccos(1 + 2\tau) .\end{aligned}$$

Auf dem Flügel ist im Bereich der kegelsymmetrischen Strömung $\tau = \tau_R = \bar{\eta}$. Damit folgt für die Druckverteilung

$$c_p = -\frac{2u}{V_\infty} = \mp \frac{2\alpha}{\pi} \arccos(1 + 2\bar{\eta})$$

und mit $c_{p_{eb}} = \mp 2\alpha$ ergibt sich

$$\frac{c_p}{c_{p_{eb}}} = \frac{1}{\pi} \arccos(1 + 2\bar{\eta}) .$$



Für den mittleren Druckbeiwert $\overline{c_p}$ im Randbereich gilt

$$\frac{\overline{c_p}}{c_{p_{eb}}} = \frac{1}{2} .$$

Dies bedeutet, dass die Außenbereiche nur halb so viel zum Auftrieb beitragen wie ein flächengleicher Bereich im Innenflügel.

Für den Gesamtauftrieb ergibt sich damit aus der Druckverteilung

$$A = \Delta c_{p_{eb}} q_\infty (b - l)l + \frac{1}{2} \Delta c_{p_{eb}} q_\infty l^2 \quad .$$

Daraus folgt für den Auftriebsbeiwert

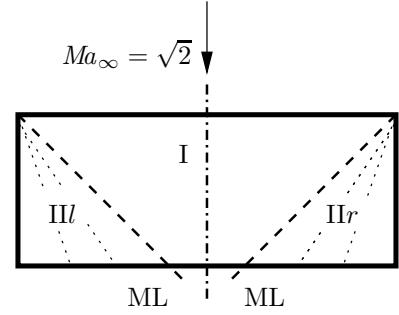
$$c_A = \frac{A}{q_\infty bl} = \Delta c_{p_{eb}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{l}{b} \right) = \Delta c_{p_{eb}} \left(1 - \frac{1}{2\Lambda} \right) \quad .$$

Mit $\Delta c_{p_{eb}} = 4\alpha$ bei $Ma_\infty = \sqrt{2}$ erhält man schließlich

$$c_A = 4\alpha \left(1 - \frac{1}{2\Lambda} \right)$$

und

$$\frac{dc_A}{d\alpha} = 4 \left(1 - \frac{1}{2\Lambda} \right) \quad . \quad (\Lambda \geq 2)$$



Diese Ergebnisse gelten für $\Lambda \geq 2$, wenn die beiden Randzonen links und rechts getrennt sind. Für $\Lambda < 2$ überschneiden sich die beiden Randzonen. Für $1 \leq \Lambda \leq 2$ entsteht im Bereich der Hinterkante ein Gebiet mit einfacher Überlappung [6].

Die Vorderkante eines Rechteckflügels ist stets eine Überschallvorderkante. Sie wird also nicht umströmt, und es tritt keine Saugkraft auf. Deshalb steht die resultierende Luftkraft senkrecht auf dem Flügel, und für den Widerstandsbeiwert ergibt sich somit

$$c_W = c_A \cdot \alpha = 4 \left(1 - \frac{1}{2\Lambda} \right) \alpha^2 \quad ,$$

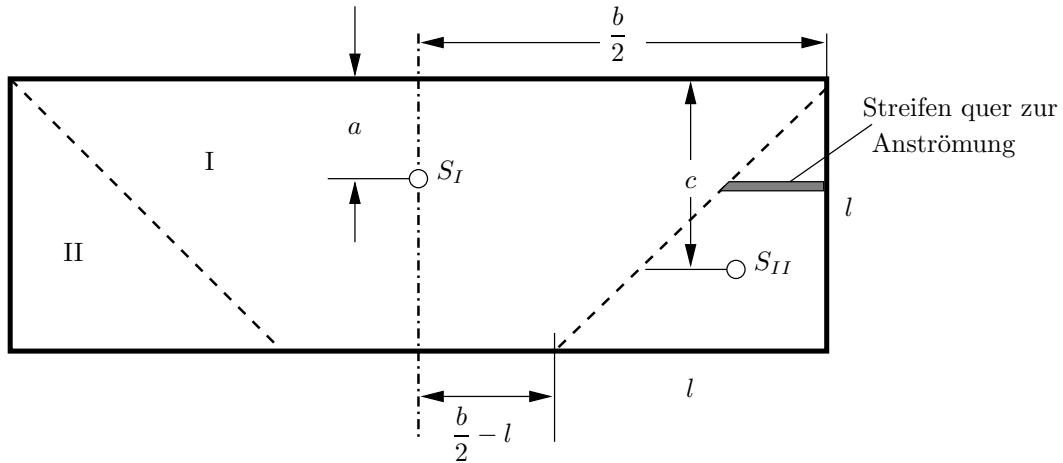
und mit $\alpha = c_A/4 \left(1 - \frac{1}{2\Lambda} \right)$ folgt weiter

$$c_W = \frac{4 \left(1 - \frac{1}{2\Lambda} \right)}{16 \left(1 - \frac{1}{2\Lambda} \right)^2} c_A^2 = \frac{c_A^2}{4 \left(1 - \frac{1}{2\Lambda} \right)}$$

oder

$$\frac{c_W}{c_A^2/\pi\Lambda} = \frac{\pi\Lambda}{4 \left(1 - \frac{1}{2\Lambda} \right)} = \frac{\pi\Lambda^2}{2(2\Lambda - 1)} \quad \text{für } Ma_\infty = \sqrt{2} \quad .$$

Aus der bekannten Druckverteilung lässt sich auch das Nickmoment und damit die Neutralpunktlage berechnen:



Im Bereich I ist der Druck konstant. Die zugehörige Teilkraft greift im Schwerpunkt des Trapezes an, und es gilt

$$a = \frac{l}{3} \frac{\frac{3}{2}b - 2l}{b - l}.$$

In den Außenbereichen ist der mittlere Druckbeiwert \bar{c}_p in allen Streifen quer zur Anströmung $\bar{c}_p = \frac{1}{2}c_{p_{eb}}$. Die Rücklage des Schwerpunktes S_{II} dieser Teilfläche ist somit gleich der Rücklage des Schwerpunktes der Dreiecksfläche

$$c = \frac{2}{3}l.$$

Damit ist das Nickmoment um die Nase

$$M_{Nase} = -\Delta c_{p_{eb}} q_\infty (b - l) la - 2 \frac{1}{2} \Delta c_{p_{eb}} q_\infty \frac{l^2}{2} c.$$

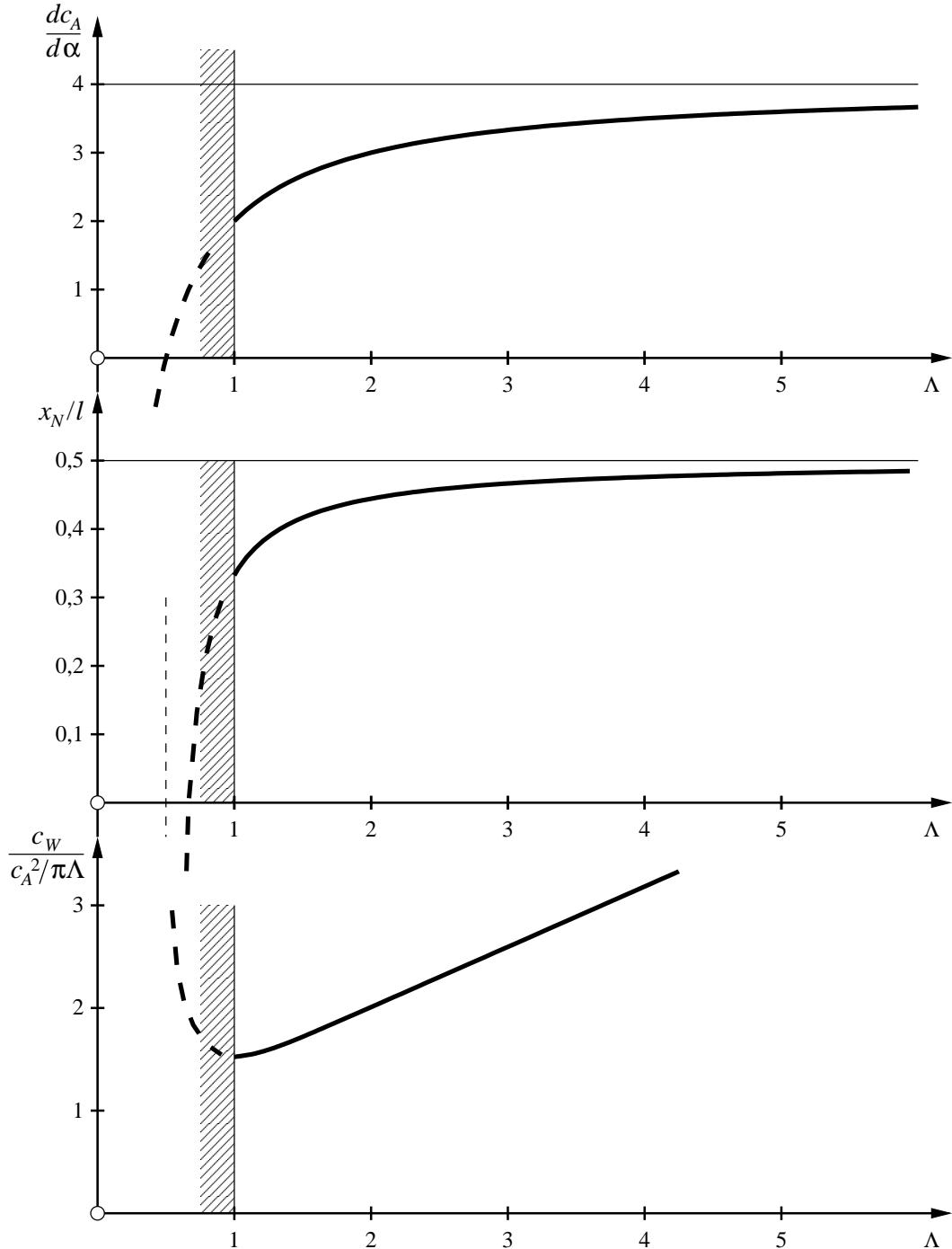
Setzt man a und c ein, so ergibt sich nach elementarer Rechnung für den Nickmomentenbeiwert

$$c_{M_{Nase}} = -4\alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\Lambda} \right) \quad \text{für } Ma_\infty = \sqrt{2} .$$

Führt man noch das Ergebnis $\alpha = c_A/4 \left(1 - \frac{1}{2\Lambda}\right)$ ein, so folgt

$$c_{M_{Nase}} = -\frac{\Lambda - \frac{2}{3}}{2\Lambda - 1} c_A \quad \text{für } Ma_\infty = \sqrt{2} .$$

Damit lassen sich die aerodynamischen Beiwerte für Rechteckflügel zusammenfassend darstellen:



Der Auftriebsbeiwert besitzt für $\Lambda \rightarrow \infty$ den Grenzwert des 2D Problems im Überschall $(dc_A/d\alpha)_\infty = 4$, und der Neutralpunkt wandert für $\Lambda \rightarrow \infty$ gegen den Wert $(x_N/l)_\infty = 0,5$ in 2D Strömung. Für $\Lambda \rightarrow \infty$ geht der Quotient $c_W/(c_A^2/\pi\Lambda)$ zwar gegen unendlich, aber der Widerstandsbeiwert selbst bleibt endlich

$$c_W(\Lambda \rightarrow \infty) = 4\alpha^2 = \frac{1}{4}c_A^2 \quad .$$

Für $\Lambda < 1$ versagt die Theorie kegelsymmetrischer Strömungen bei Rechteckflügeln, weil dann Felder mit mehrfacher Überschneidung auf dem Flügel auftreten.

3.2.5 Deltaflügel mit Unterschallvorderkanten

Es wird ein angestellter Plattenflügel (Anstellwinkel α) mit dreieckigem Grundriss bei der Machzahl $Ma_\infty = \sqrt{2}$ ($\beta = \sqrt{Ma_\infty^2 - 1} = 1$) betrachtet. Es ist ($\tan \mu = 1$)

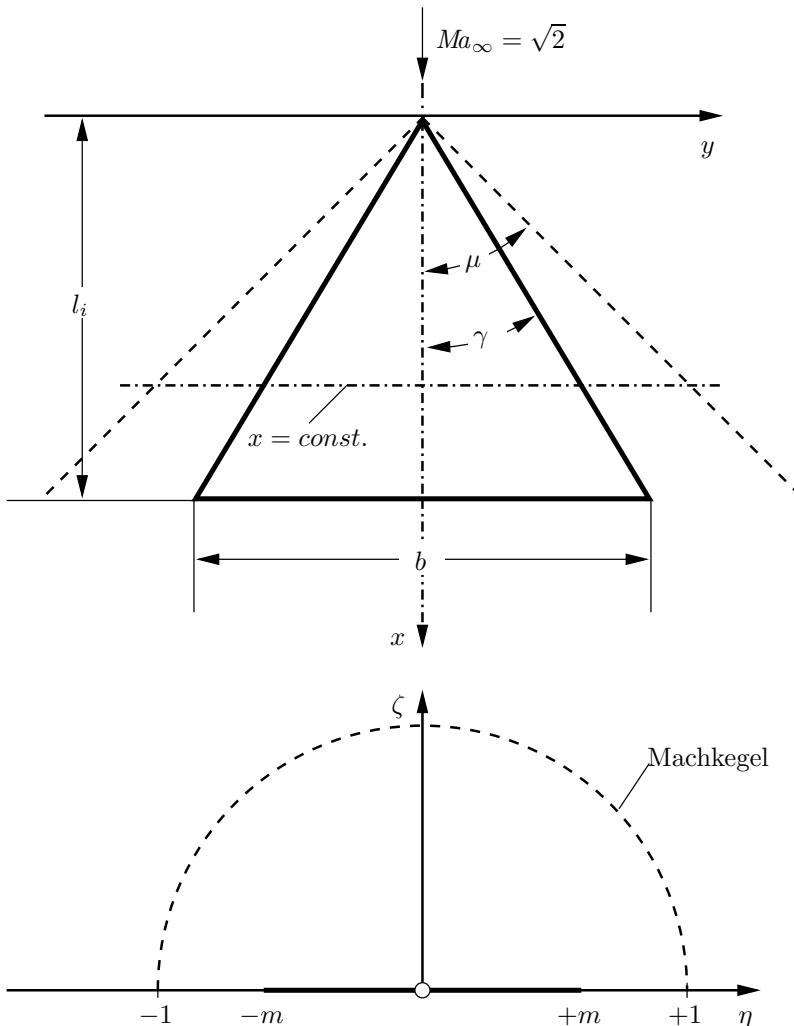
$$m = \frac{\tan \gamma}{\tan \mu} = \tan \gamma \quad .$$

Zunächst soll der Fall einer Unterschallvorderkante $m < 1$ behandelt werden. Für das Seitenverhältnis von Deltaflügeln gilt

$$\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{2b^2}{bl_i} = 2\frac{b}{l_i} \quad .$$

Damit ist

$$m = \tan \gamma = \frac{b}{2l_i} = \frac{\Lambda}{4} < 1 \quad .$$



Die Bedingung für eine Unterschallvorderkante $m < 1$ bedeutet somit bei $Ma_\infty = \sqrt{2}$

$$\Lambda < 4 \quad .$$

Als später zu verwendendes Ergebnis sei noch bereitgestellt

$$m \cdot l_i = \frac{b}{2} \quad .$$

Für Deltaflügel mit Unterschallvorderkanten lautet die Lösung für kegelsymmetrische Überschallströmung

$$\begin{aligned} u &= \Re \frac{m^2 \alpha V_\infty}{E(k)} \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2 - \tau^2}} \\ w &= \Re \frac{\alpha V_\infty}{E(k)} \left[\tau \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\tau^2 - m^2}} - E(\vartheta, k) \right] . \end{aligned}$$

Darin bedeuten

$$k = \sqrt{1 - m^2} \quad \text{und} \quad \vartheta = \arcsin \frac{\sqrt{1 - \tau^2}}{\sqrt{1 - m^2}}$$

und

$$\begin{aligned} E(\vartheta, k) &= \int_0^\vartheta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi && \text{unvollständiges elliptisches Integral 2. Gattung} \\ E(k) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi && \text{vollständiges elliptisches Integral 2. Gattung.} \end{aligned}$$

Dabei sind k der Modul und φ die Amplitude.

Untersucht man zunächst die Lösung für w , so ist auf dem Flügel $\tau = \eta \leq m$ der erste Ausdruck in der Klammer

$$\sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\tau^2 - m^2}} = \sqrt{\frac{\tau^2 - 1}{m^2 - \tau^2}} \quad \text{rein imaginär.}$$

Die Grenze des Integrals ist

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arcsin \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{1 - m^2}} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{\tau^2 - m^2}{1 - m^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \arcsin \sqrt{\frac{\tau^2 - m^2}{1 - m^2}} , \end{aligned}$$

und mit der allgemeinen Beziehung

$$\arcsin ix = i \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

ist der letzte Ausdruck für $\tau < m$ rein imaginär. Auf dem Flügel geht also das unvollständige in das vollständige elliptische Integral 2.Gattung über ($E(\vartheta, k) \rightarrow E(\frac{\pi}{2}, k) \rightarrow E(k)$, man vergl. ⁴) , und für die w -Komponente erhält man damit

$$w = -\frac{\alpha V_\infty}{E(k)} \cdot E(k) = -\alpha V_\infty .$$

⁴**P. F. Byrd, M. D. Friedman:** Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1954, p. 12.

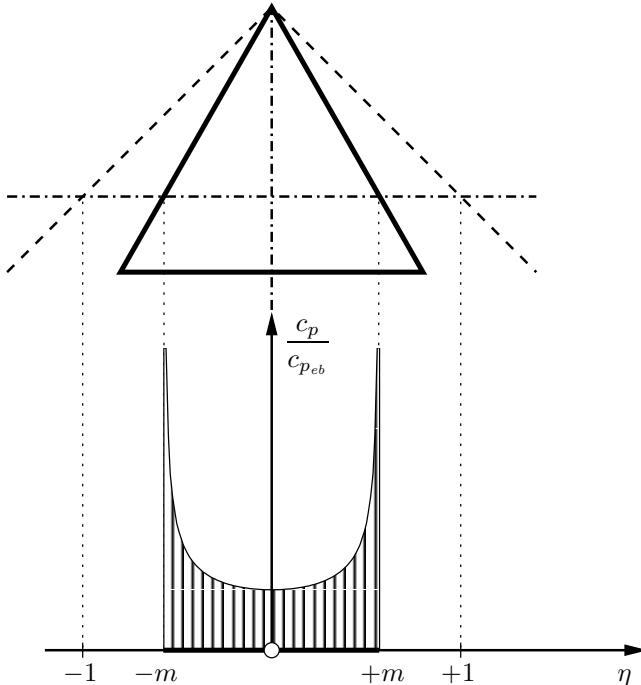
Die kinematische Strömungsbedingung ist also auf dem Flügel erfüllt.

Aus der Lösung für u folgt sofort für den Druckbeiwert auf dem Flügel $\tau = \eta \leq m$

$$c_p = -\frac{2u}{V_\infty} = \mp \frac{2\alpha m^2}{E(k) \sqrt{m^2 - \eta^2}} ,$$

und mit $c_{p_{eb}} = \mp 2\alpha$ ergibt sich

$$\frac{c_p}{c_{p_{eb}}} = \frac{m}{E(k)} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\eta}{m})^2}} .$$



Die Druckverteilung weist an der Vorderkante eine Singularität auf. Die Vorderkante wird umströmt (Unterschallkante, vgl. die 1. Birnbaum'sche Normalverteilung). Es tritt eine Saugkraft auf.

Aus der Druckverteilung ergibt sich für den Auftrieb des Flügels

$$A = \iint_{(S)} (p_{un} - p_\infty - p_{ob} + p_\infty) dx dy .$$

Mit der Symmetrieverteilung $p_{un} - p_\infty = -(p_{ob} - p_\infty)$ folgt weiter

$$A = 2 \iint_{(S)} (p_{un} - p_\infty) dx dy = 2q_\infty \iint_{(S)} c_{p_{un}} dx dy .$$

Geht man zur Variablen η über, gemäß

$$y = \eta x \quad \text{und} \quad dy = x d\eta ,$$

so ergibt sich

$$A = 2q_\infty \iint_{(S)} c_{p_{un}} \cdot d\eta \cdot x \cdot dx .$$

Mit der Druckverteilung erhält man

$$A = \frac{2q_\infty 2\alpha m^2}{E(k)} \underbrace{\int_{-1}^{+1} \frac{d(\frac{\eta}{m})}{\sqrt{1 - (\frac{\eta}{m})^2}}}_{\pi} \underbrace{\int_0^{l_i} x dx}_{l_i^2/2}$$

und

$$A = \frac{4q_\infty \alpha m^2}{E(k)} \pi \frac{l_i^2}{2} .$$

Mit dem früher bereitgestellten Ergebnis $ml_i = b/2$ ergibt sich für den Auftriebsbeiwert

$$c_A = \frac{2A}{q_\infty b l_i} = \frac{A}{q_\infty m l_i^2} = 2\pi \alpha \frac{m}{E(k)}$$

und für den Auftriebsanstieg

$$\frac{dc_A}{d\alpha} = 2\pi \frac{m}{E(k)} .$$

Führt man noch $m = \Lambda/4$ ein, so folgt schließlich

$$\frac{dc_A}{d\alpha} = \frac{\pi}{2} \Lambda \frac{1}{E(k)} .$$

Bei der Darstellung dieses Ergebnisses treten folgende Grenzwerte auf:

$$\Lambda \rightarrow 0 : m \rightarrow 0 ; \quad k = \sqrt{1 - m^2} \rightarrow 1$$

$$E(k) = E(1) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi = 1$$

$\frac{dc_A}{d\alpha}(\Lambda \rightarrow 0) = \frac{\pi}{2} \Lambda$	Dies ist der Grenzfall der Theorie schlanker Körper
---	---

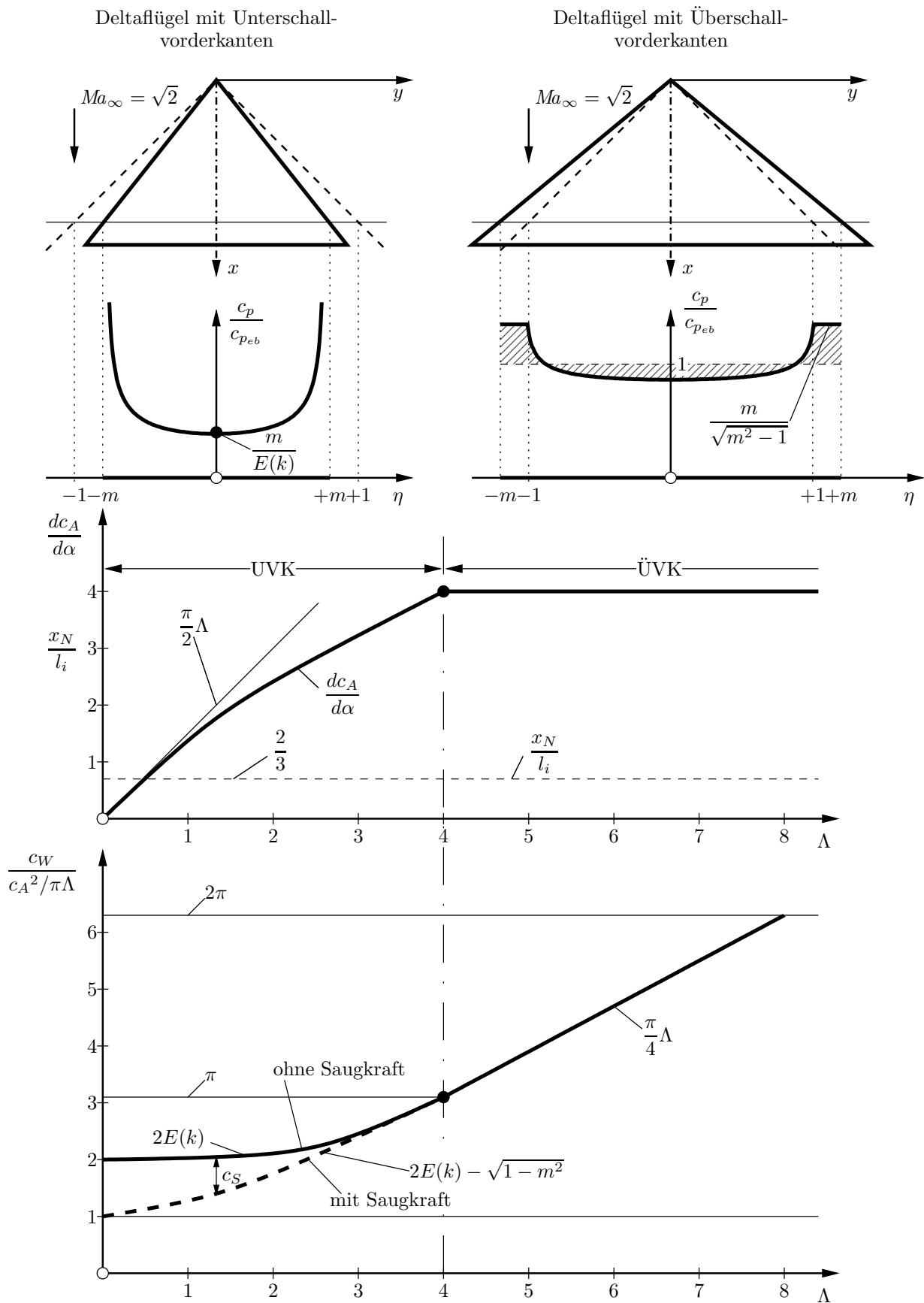
$$\Lambda = 4 : m = 1 ; \quad k = 0$$

$$E(k) = E(0) = \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

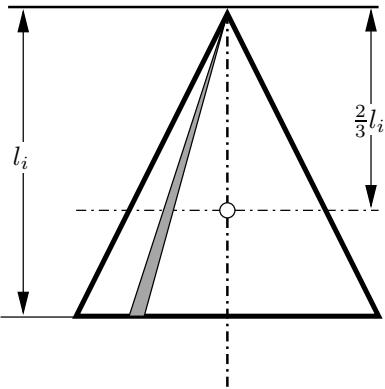
$\frac{dc_A}{d\alpha}(\Lambda = 4) = \frac{\pi}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{\pi} = 4 .$

Darstellung siehe Figur (S. 151).

Aerodynamische Beiwerte von Deltaflügeln mit Unterschall- und mit Überschallvorderkanten ($Ma_\infty = \sqrt{2}$)



Bezüglich der Neutralpunktllage führt folgende Überlegung zum Ziel: Auf einem beliebigen dreieckigen Flächenelement entlang eines Fahrstrahls auf dem Flügel ist der Druck konstant.



Die Luftkraft an diesem Flächenelement greift in seinem Schwerpunkt bei $2l_i/3$ an. Auf benachbarten Flächenelementen liegt zwar ein anderer Druck entsprechend der Druckverteilung vor, aber alle diese Teilkräfte greifen im Abstand $2l_i/3$ von der Flügelspitze an. Folglich gilt für den Neutralpunkt

$$\frac{x_N}{l_i} = \frac{2}{3}.$$

Darstellung siehe Figur (S. 151).

Falls die resultierende Luftkraft senkrecht auf dem Flügel steht, gilt für den Widerstand $W = A \cdot \alpha$. Nun wird aber die Unterschallvorderkante umströmt. Es tritt dort eine Saugkraft S_V auf, und für den Widerstand gilt (kleine Anstellwinkel)

$$W = A \cdot \alpha - S_V.$$

Die Saugkraft lässt sich aus einer Analyse der Singularität an der Vorderkante ermitteln. Dort geht der Druck gegen Unendlich und die Fläche, auf die er wirkt, ist Null. Es ergibt sich (ohne Beweis, vgl. ⁵⁾)

$$S_V = \pi \frac{l_i^2 m^2 \sqrt{1 - m^2}}{E^2(k)} \alpha^2 q_\infty \quad .$$

Dies führt auf einen Saugkraftbeiwert

$$c_S = \frac{S_V}{q_\infty S} = \frac{S_V}{q_\infty m l_i^2} = \frac{\pi m \sqrt{1 - m^2}}{E^2(k)} \alpha^2 \quad ,$$

und mit dem Ergebnis für c_A in der Form

$$\alpha = \frac{c_A}{\pi \Lambda} \cdot 2E(k)$$

⁵R. Grammel: Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Verlag Vieweg Braunschweig 1917.

folgt weiter

$$c_S = \frac{\pi\Lambda}{4} \frac{\sqrt{1-m^2}}{E^2(k)} \cdot \frac{c_A^2}{(\pi\Lambda)^2} 4E^2(k) = \frac{c_A^2}{\pi\Lambda} \sqrt{1-m^2} \quad .$$

Für den Widerstandsbeiwert

$$c_W = c_A \alpha - c_S$$

erhält man mit diesem Ergebnis

$$\text{mit Saugkraft: } c_W = \frac{c_A^2}{\pi\Lambda} \left[2E(k) - \sqrt{1-m^2} \right]$$

$$\text{ohne Saugkraft: } c_W = \frac{c_A^2}{\pi\Lambda} 2E(k) \quad .$$

Die Grenzwerte sind

$$\Lambda \rightarrow 0 : m \rightarrow 0; \quad k \rightarrow 1; \quad E(k) \rightarrow 1$$

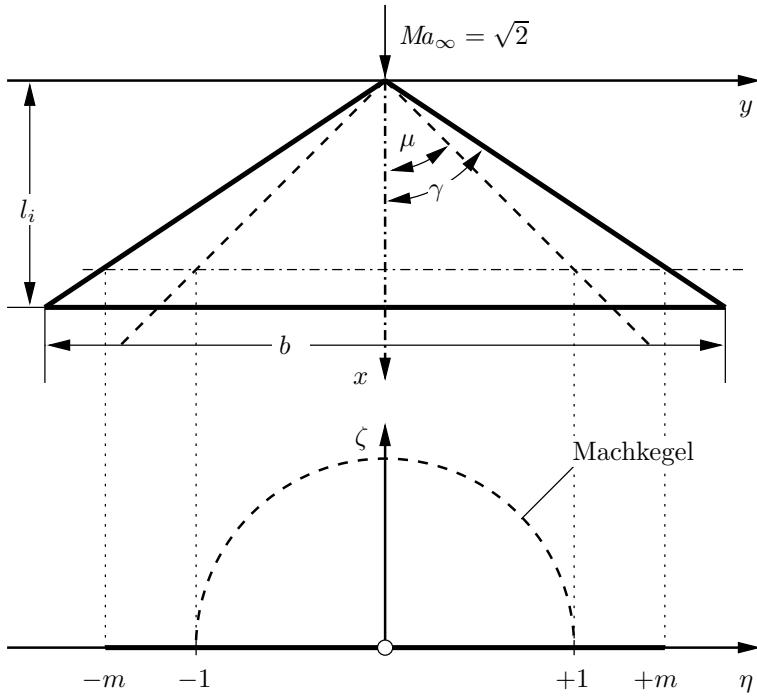
$$\boxed{\frac{c_W}{c_A^2/\pi\Lambda} = 1}$$

$$\Lambda = 4 : m = 1; \quad k = 0; \quad E(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\frac{c_W}{c_A^2/\pi\Lambda} = \pi \quad .}$$

Die Ergebnisse ohne und mit Saugkraft sind in der Figur (S. 151) dargestellt. Damit sich die Saugkraft ausbilden kann, muss bei einer praktischen Anwendung (mit Dicke) die Unterschallvorderkante abgerundet sein. Ist dagegen die Vorderkante zu scharfkantig ausgebildet, so treten örtliche Strömungsablösungen auf, die einen vollständigen oder teilweisen Verlust der Saugkraft zur Folge haben, und der Widerstand des Flügels ist dann deutlich erhöht.

3.2.6 Deltaflügel mit Überschallvorderkanten



Bei Überschallvorderkante ist bei $Ma_\infty = \sqrt{2}$

$$m = \frac{\tan \gamma}{\tan \mu} = \tan \gamma > 1$$

oder

$$\Lambda = 4m > 4 .$$

Für Deltaflügel mit Überschallvorderkanten lautet die Lösung für kegelsymmetrische Überschallströmungen

$$u = \pm \Re \frac{\alpha V_\infty}{\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} 2 \arccos \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{m^2 - \tau^2}}$$

$$w = \pm \Re i \frac{\alpha V_\infty}{\pi} \ln \frac{\tau + m}{\tau - m} .$$

Zunächst sei wieder die Lösung für die w -Komponente untersucht. Auf dem Flügel ist $\tau = \eta \leq m$. Dann gilt

$$\ln \frac{\tau + m}{\tau - m} = \ln \left(-\frac{m + \tau}{m - \tau} \right) = \ln(-1) + \ln \frac{m + \tau}{m - \tau} ,$$

wobei der letzte Ausdruck reell ist. Für den Logarithmus einer komplexen Zahl $z = r \cdot e^{i\varphi}$ gilt

$$\ln z = \ln r e^{i\varphi} = \ln r + i\varphi ,$$

und damit folgt für $z = -1$ (also $r = 1$, $\varphi = \pm\pi$)

$$\ln(-1) = \pm i\pi .$$

Die Störgeschwindigkeit w auf dem Flügel ist somit

$$w = i \cdot \frac{\alpha V_\infty}{\pi} \cdot i\pi = -\alpha V_\infty .$$

Die kinematische Strömungsbedingung ist also erfüllt.

Bei der Analyse der Lösung für die u -Komponente der Störgeschwindigkeit sind 2 Bereiche zu unterscheiden:

Innenbereich $0 \leq (\tau = \eta) \leq 1$

Hier ist

$$c_p = -\frac{2u}{V_\infty} = \mp \frac{2}{V_\infty} \frac{\alpha V_\infty}{\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} 2 \arccos \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{m^2 - \eta^2}}$$

oder mit $c_{p_{eb}} = \mp 2\alpha$ bei $Ma_\infty = \sqrt{2}$

$$\frac{c_p}{c_{p_{eb}}} = \frac{2}{\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \arccos \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{m^2 - \eta^2}} \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Außenbereich $1 \leq (\tau = \eta) \leq m$

Hier folgt mit der allgemeinen Beziehung

$$\arccos ix = \frac{\pi}{2} \pm i \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} \arccos \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{m^2 - \eta^2}} &= \arccos i \sqrt{\frac{\eta^2 - 1}{m^2 - \eta^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \pm i \ln \left(\sqrt{\frac{\eta^2 - 1}{m^2 - \eta^2}} + \sqrt{1 + \frac{\eta^2 - 1}{m^2 - \eta^2}} \right), \end{aligned}$$

wobei das logarithmische Glied keinen Betrag zum Realteil liefert. Damit ergibt sich

$$c_p = \mp \frac{2}{V_\infty} \cdot \frac{\alpha V_\infty}{\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} 2 \frac{\pi}{2} = \mp 2\alpha \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}}$$

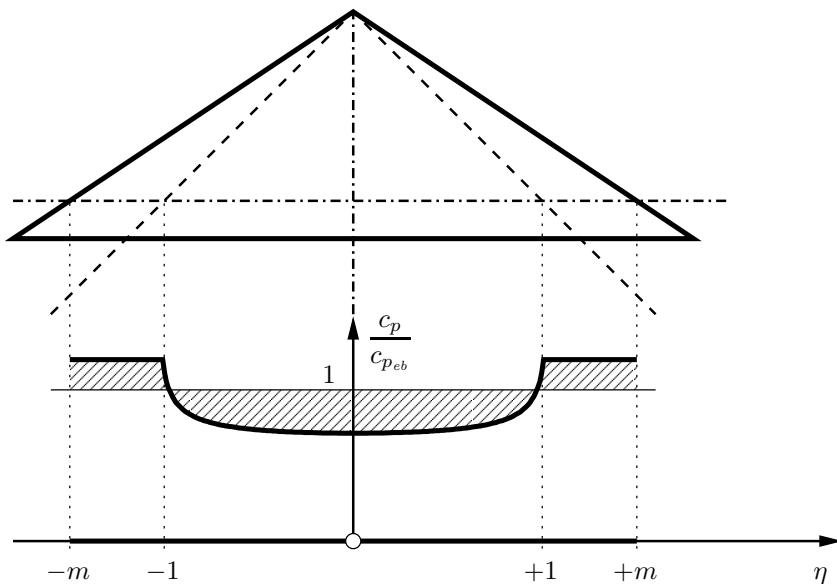
oder mit $c_{p_{eb}} = \mp 2\alpha$ bei $Ma_\infty = \sqrt{2}$

$$\frac{c_p}{c_{p_{eb}}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \quad 1 \leq \eta \leq m .$$

Spezielle Werte der Druckverteilung im Innenbereich sind

$$\eta = 0 : \frac{c_p}{c_{p_{eb}}} = \frac{2}{\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \arccos \frac{1}{m}$$

$$\eta = 1 : \frac{c_p}{c_{p_{eb}}} = \frac{2}{\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \arccos 0 = \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} .$$



Man kann zeigen, dass für den spannweiten Mittelwert des Druckbeiwertes gilt (ohne Beweis)

$$\begin{aligned}\overline{c_p} &= \frac{1}{2m} \int_{-m}^{+m} c_p d\eta \\ &= \mp 2\alpha = c_{p_eb}.\end{aligned}$$

Jeder Streifen quer zur Anströmung trägt zum Auftrieb so viel wie eine ebene Platte bei. Damit ist der Gesamtauftriebsbeiwert wie beim 2D–Problem

$$c_A = 4\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{dc_A}{d\alpha} = 4, \quad \text{für} \quad \Lambda \geq 4.$$

Dies bedeutet: Alle Deltaflügel mit Überschallvorderkanten besitzen den gleichen Auftriebsanstieg. Das Ergebnis ist in der Figur (S. 151) aufgetragen. Beim Nickmoment gelten die gleichen Überlegungen wie beim Deltaflügel mit Unterschallvorderkante. Die Neutralpunktllage ist damit ebenfalls

$$\frac{x_N}{l_i} = \frac{2}{3}.$$

Beim Übergang von Unterschallvorderkanten zu Überschallvorderkanten ändert sich bei Deltaflügeln die Neutralpunktllage nicht. Die Überschallvorderkanten werden nicht umströmt. Deshalb tritt eine Saugkraft nicht auf. Die resultierende Luftkraft steht senkrecht auf dem Flügel, und es gilt für den Widerstandsbeiwert

$$c_W = c_A \cdot \alpha = 4\alpha^2 = \frac{c_A^2}{4}$$

oder

$$\frac{c_W}{c_A^2/\pi\Lambda} = \frac{\pi}{4}\Lambda.$$

Auch dieses Ergebnis ist in der Figur (S. 151) dargestellt.

3.3 Literatur zu Kapitel 3

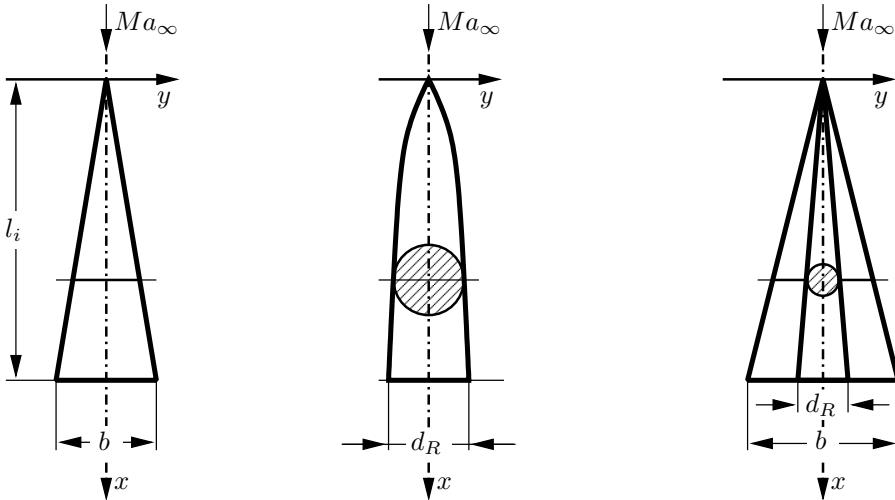
- [1] A. F. Donovan, H. R. Lawrence (Ed.): Aerodynamic Components of Aircraft at High Speeds. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. III, Princeton University Press, 1957.
- [2] W. R. Sears (Ed.): General Theory of High Speed Aerodynamics. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. VI, Princeton University Press, 1954.
- [3] H. Schlichting, E. Truckenbrodt: Aerodynamik des Flugzeuges, Band I/II, 3. Auflage. Springer Verlag Berlin, 2001.
- [4] K. Oswatitsch: Grundlagen der Gasdynamik. Springer Verlag Wien, 1976.
- [5] J. D. Anderson jr.: Modern Compressible Flow, Second Edition. McGraw Hill New York, 1990.
- [6] D. Hummel: Aerodynamik II - Einführung in die Tragflügeltheorie. Fachbereich Maschinenbau der TU Braunschweig, 2003.

4 Theorie schlanker Körper

In diesem Abschnitt soll nun noch der Grenzfall $\Lambda \rightarrow 0$ betrachtet werden, der bei verschiedenen Verfahren im Unter- und Überschall bereits in Erscheinung getreten ist.

4.1 Schlankheitsbedingung und Grundgleichung

Schlankere Körper sind solche Körper, deren Abmessungen in Strömungsrichtung sehr viel größer sind als in den beiden anderen Koordinatenrichtungen. Beispiele sind



schlanker, dünner Flügel Rakete, Rumpf schlanke Flügel-Rumpf-Kombination

Bei der Umströmung solcher Körper sind die Änderungen der Strömungsgrößen in x -Richtung sehr viel kleiner, als in y - und z -Richtung. Es ist also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_{xx} \ll \varphi_{yy} \quad \text{und} \quad \varphi_{xx} \ll \varphi_{zz} .$$

Deshalb ist in der linearen Potentialgleichung das erste Glied vernachlässigbar klein, so dass als Potentialgleichung

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

verbleibt. Die Bedeutung dieser Vereinfachung liegt darin, dass

- die Umströmung eines 3D-Tragflügels durch Lösen einer 2D-Potentialgleichung (in einer Querschnittsebene) berechnet werden kann.
- das Problem unabhängig von der Machzahl wird. Die Lösung der Theorie schlanker Körper gilt daher bei Unter- und Überschallströmung.

Im Folgenden sind zunächst die Voraussetzungen zu untersuchen, unter denen das erste Glied der Potentialgleichung vernachlässigt werden kann. Dabei soll auch der Fall einer kompressiblen Strömung betrachtet werden, so dass zunächst die linearisierte Potentialgleichung zu Grunde gelegt wird. Es wird nun eine Koordinatennormierung durchgeführt derart, dass keine Koordinatenrichtung bevorzugt ist.

Die Transformation lautet

$$\bar{x} = \frac{x}{l_i}; \quad \bar{y} = \frac{y}{s}; \quad \bar{z} = \frac{z}{s} \quad \text{mit} \quad s = \frac{b}{2}.$$

Damit folgt aus der Potentialgleichung

$$(1 - Ma_\infty^2) \cdot \frac{1}{l_i^2} \cdot \frac{b^2}{4} \varphi_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi_{\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{\bar{z}\bar{z}} = 0.$$

Für eine Abschätzung der Größenordnung der Glieder kann man für das Seitenverhältnis Λ schreiben

$$\Lambda = c \cdot \frac{b}{l_i} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} c &= 1 && \text{für Rechteckflügel} \\ c &= 2 && \text{für Deltaflügel.} \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Potentialgleichung ein, so ergibt sich

$$(1 - Ma_\infty^2) \Lambda^2 \frac{1}{4c^2} \varphi_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi_{\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{\bar{z}\bar{z}} = 0.$$

Infolge der gewählten Koordinatennormierung sind $\varphi_{\bar{x}\bar{x}}$, $\varphi_{\bar{y}\bar{y}}$ und $\varphi_{\bar{z}\bar{z}}$ von gleicher Größenordnung. Der Ausdruck $1/4c^2$ ist höchstens von der Größenordnung 1 (Rechteckflügel 1/4, Deltaflügel 1/16). Das erste Glied ist damit vernachlässigbar klein, falls die Schlankheitsbedingung

$$(1 - Ma_\infty^2) \Lambda^2 \ll 1 \quad \text{für Flügel}$$

$$(1 - Ma_\infty^2) \delta^2 \ll 1 \quad \text{für Rümpfe} \quad (\delta = d_R/l_i)$$

erfüllt ist. Bei inkompressibler Strömung bedeutet dies, dass $\Lambda^2 \ll 1$ sein muss (unter Berücksichtigung des Ausdrucks $1/4c^2$ evtl. auch nur $\Lambda < 1$).

Die Schlankheitsbedingung gilt analog auch für Überschallströmungen. In der Potentialgleichung

$$(Ma_\infty^2 - 1) \varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0$$

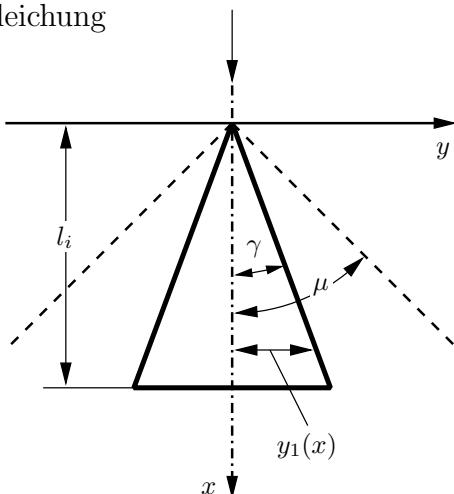
ist das erste Glied vernachlässigbar klein, falls

$$(Ma_\infty^2 - 1) \Lambda^2 \frac{1}{4c^2} \ll 1.$$

Dabei ist $Ma_\infty^2 - 1 = \frac{1}{\tan^2 \mu}$.

Für Deltaflügel ist

$$\frac{\Lambda}{2c} = \frac{(2l_i \tan \gamma)^2}{4l_i^2 \tan \gamma} = \tan \gamma.$$



Damit lautet die Schlankheitsbedingung für Deltaflügel im Überschall

$$\frac{\tan^2 \gamma}{\tan^2 \mu} \ll 1 \quad \text{oder} \quad \boxed{\gamma \ll \mu}.$$

Ein schlanker Flügel muss also Unterschallvorderkanten besitzen, und der Körper muss sehr weit vom Mach'schen Kegel entfernt sein. Unter diesen Voraussetzungen entfällt das erste Glied in der Potentialgleichung, und auch im Überschall gilt dann

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 .$$

Besondere Überlegungen sind notwendig bezüglich der Gültigkeit der Vereinfachungen im transsonischen Geschwindigkeitsbereich, in dem die linearisierte Potentialgleichung nicht gilt. Nach den Betrachtungen im Abschnitt 1.2.2 gilt im Rahmen der Theorie kleiner Störungen im transsonischen Geschwindigkeitsbereich

$$(1 - Ma_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = (\kappa + 1)Ma_\infty^2 \frac{\varphi_x}{U_\infty} \varphi_{xx} .$$

Für $Ma_\infty \rightarrow 1$ ist das erste Glied der linken Seite in jedem Fall vernachlässigbar klein. Für schlanke Körper kann dann aber auch das nichtlineare Glied auf der rechten Seite wegen $\varphi_x \varphi_{xx} \ll \varphi_{yy}$ entfallen, so dass sich auch bei schallnahen Strömungen

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

ergibt. Die Grundgleichung der Theorie schlanker Körper ist also gültig im gesamten Machzahlbereich $0 \leq Ma_\infty \leq 3$. Streng genommen gelten die verwendeten Vernachlässigungen nur in Körernähe, während weit weg vom Körper alle Störgeschwindigkeiten und deren Ableitungen klein sind.

Die allgemeine Lösung des Auftriebsproblems in der Theorie schlanker Körper lautet

$$\varphi = \varphi(y, z; x) .$$

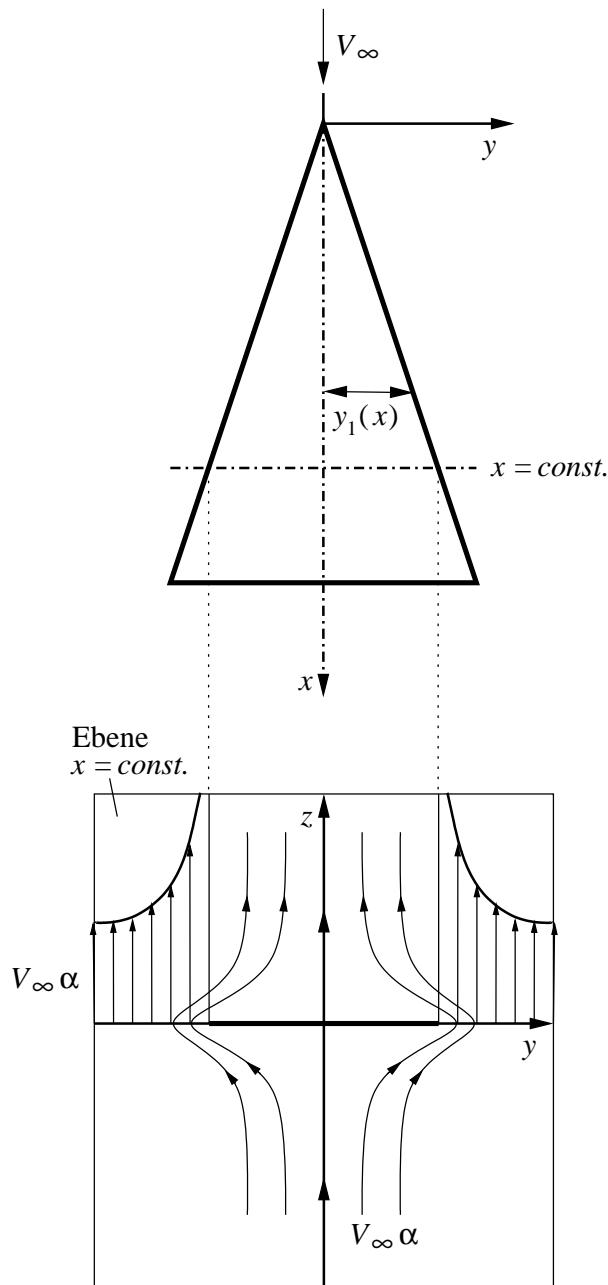
Dabei ist $\varphi(y, z; x)$ das Störpotential des Querschnittsproblems in der $y-z$ -Ebene. Die x -Abhängigkeit ergibt sich indirekt aus den Randbedingungen.

4.2 Auftriebsproblem für schlanke Flügel

Es wird ein ebener, schlanker Flügel (ohne Dicke) betrachtet, der unter dem Anstellwinkel α angeströmt wird. Die Gleichung

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

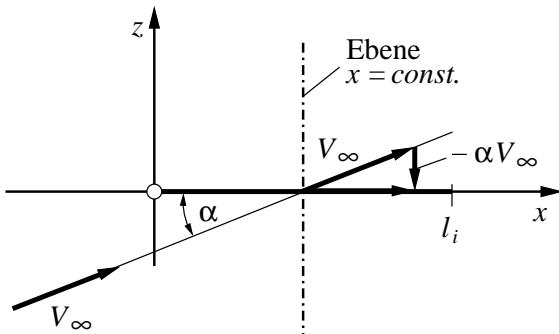
ist für jede Querschnittsebene $x = \text{const.}$ separat zu lösen. Das Ergebnis ist unabhängig von den Strömungsverhältnissen in Querebenen davor oder dahinter. Allerdings hängt die Lösung von der örtlichen Halbspannweite $y_1(x)$ ab.



Damit ergibt sich aus den Randbedingungen eine x -Abhängigkeit.

Die Gesamtlösung für den Flügel erhält man durch Zusammensetzen der Ergebnisse aller Schnitte.

Bei der linearisierten Potentialgleichung als Ausgangspunkt für die Theorie schlanker Körper verläuft die x -Achse in Richtung der Anströmung. In der Querschnittsebene (y - z -Ebene) ist nun das Störpotential φ so zu bestimmen, dass die kinematische Strömungsbedingung auf dem Flügel $w = -\alpha V_\infty$ erfüllt ist. Die praktische Lösung dieses Problems kann so erfolgen, dass in der Querschnittsebene eine Querströmung mit der Geschwindigkeit $V_\infty \cdot \alpha$ in z -Richtung betrachtet wird.

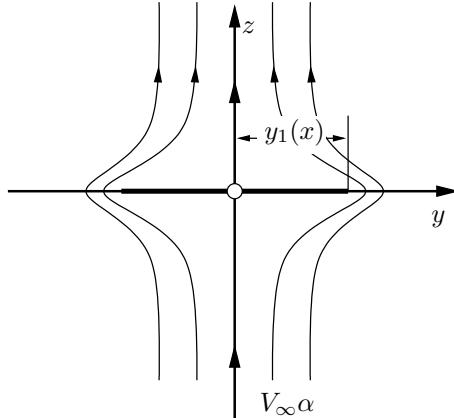


Das Potential der ungestörten Strömung in der x-z-Ebene ist $V_\infty \cdot \alpha \cdot z$, und man bestimmt dann

$$\varphi' = V_\infty \cdot \alpha \cdot z + \varphi$$

mit der Potentialfunktion φ der Störströmung durch den schlanken Flügel. Die zugehörige Strömung stellt dann die Umströmung einer quergestellten ebenen Platte dar, die mit Methoden der Profiltheorie ermittelt werden kann. Bei dieser Lösung des Querströmungsproblems liegt die Ebene $x = \text{const.}$ senkrecht zum Flügel (körperfestes Koordinatensystem) wie im vorangehenden Bild gezeigt. Für die gesuchten Störgeschwindigkeiten gilt

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} - V_\infty \alpha \quad . \end{aligned}$$

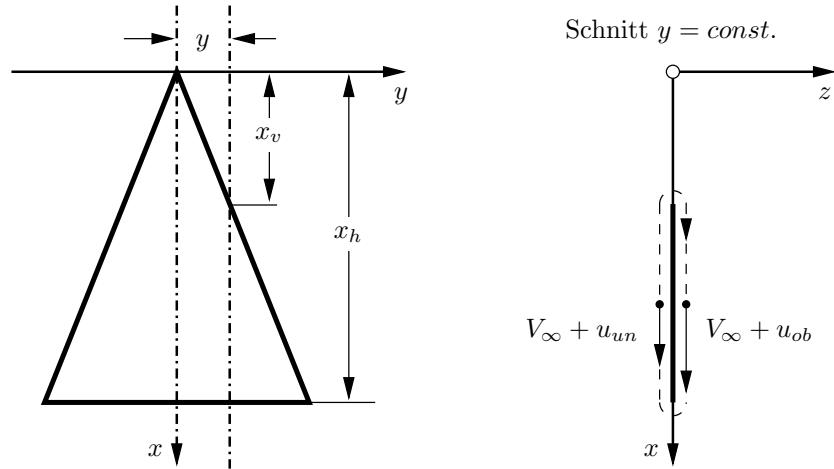


Zur Ermittlung des Störpotentials φ' muss das 2D–Problem der (von unten) umströmten ebenen Platte gelöst werden. Hierzu können die Methoden der Profiltheorie eingesetzt werden. Im vorliegenden Fall kann dies sowohl mit dem Singularitätenverfahren als auch mit der Methode der konformen Abbildung erfolgen (vgl. Vorlesung Profiltheorie). Für den Fall der ebenen Platte mit der Breite $2y_1(x)$ und der Queranströmung mit $V_\infty \alpha$ existiert eine analytische Lösung [1]. Auf der Kontur gilt

$$\varphi'(y, z = 0, x) = \pm V_\infty \alpha \sqrt{y_1^2(x) - y^2} \quad . \quad \begin{array}{ll} + & \text{oben} \\ - & \text{unten} \end{array}$$

Dies bedeutet, dass das Störpotential auf der Kontur längs der Spannweite elliptisch verteilt ist.

Zur Herstellung des Zusammenhangs mit der Zirkulationsverteilung sei ein Schnitt



$y = \text{const.}$ an einem schlanken Flügel betrachtet. Für das Linienintegral der Geschwindigkeit längs einer geschlossenen Kurve um das Plattenprofil in diesem Schnitt gilt

$$\Gamma(y) = \int_{x_v}^{x_h} (V_\infty + u_{ob}) dx - \int_{x_v}^{x_h} (V_\infty + u_{un}) dx \quad .$$

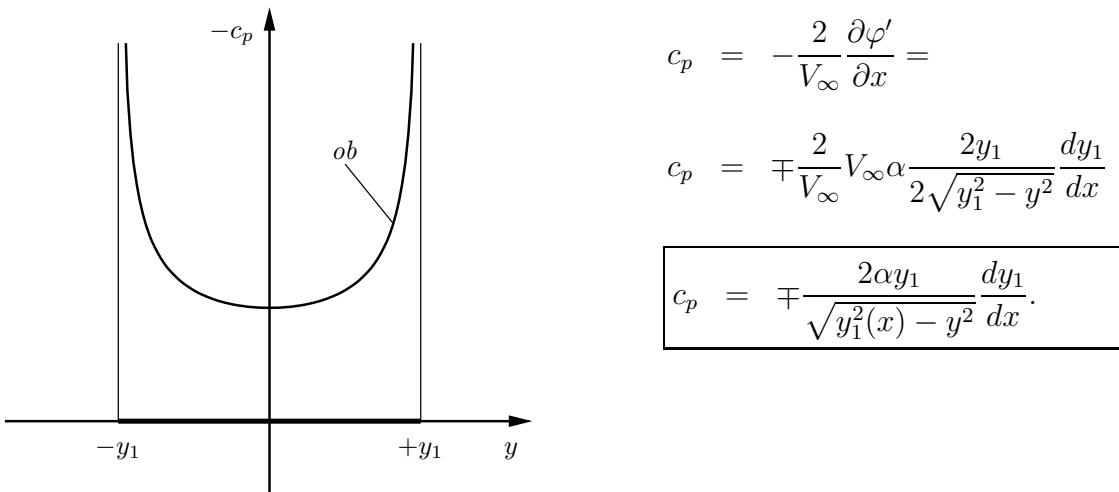
Mit $u_{ob} = -u_{un}$ folgt daraus

$$\Gamma(y) = 2 \int_{x_v}^{x_h} u_{ob} dx = 2 \int_{x_v}^{x_h} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right)_{ob} dx = 2 \varphi'_{ob} \Big|_{x_v}^{x_h}$$

$$\Gamma(y) = 2 \varphi'_{ob,h}(y) \quad .$$

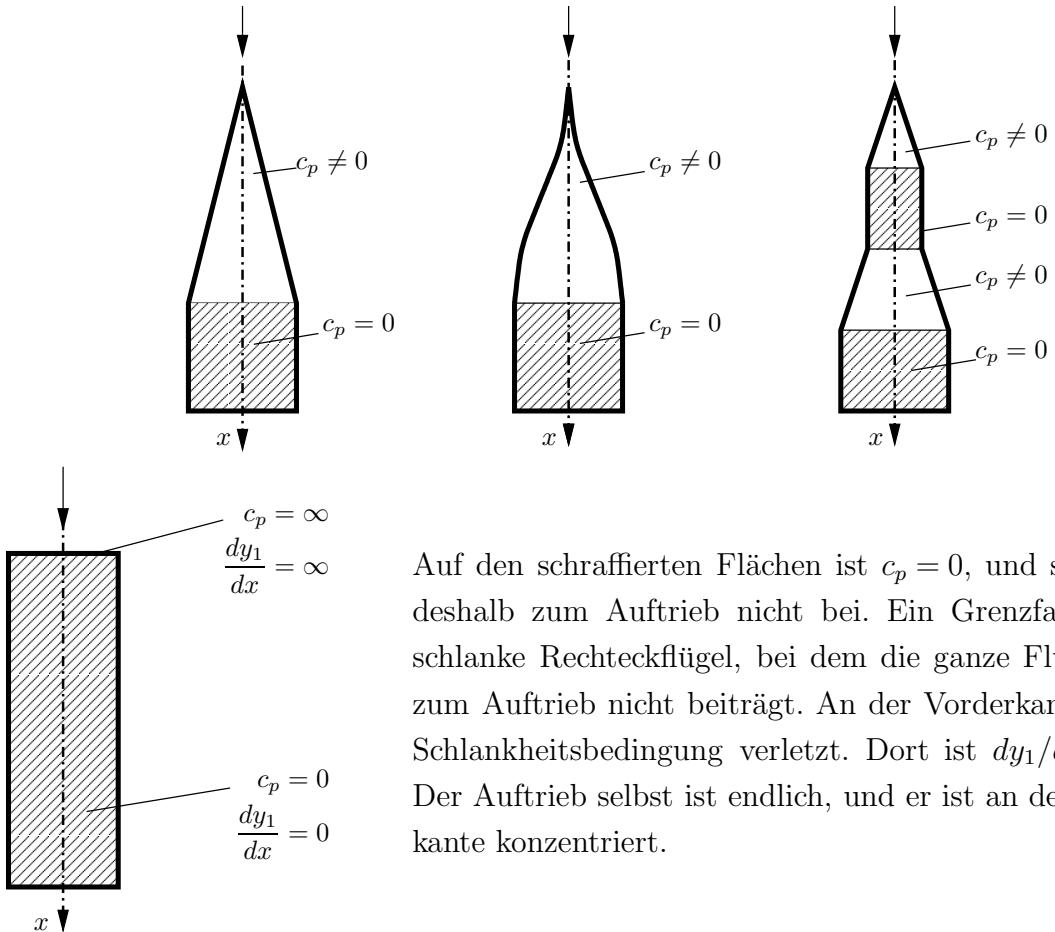
Die Zirkulation $\Gamma(y)$ ist gleich dem doppelten Wert des Störpotentials $\varphi'_{ob,h}(y)$ auf der Oberseite an der Hinterkante. Da der Verlauf an der Hinterkante (wie in jedem anderen Schnitt $x = \text{const.}$) längs der Spannweite elliptisch ist, ergibt sich für schlanke Flügel, dass die Zirkulationsverteilung elliptisch ist.

Aus dem Störpotential $\varphi'(y, z=0, x)$ folgt für den Druckbeiwert an ebenen Plattenflügeln mit $\alpha = \text{const.}$



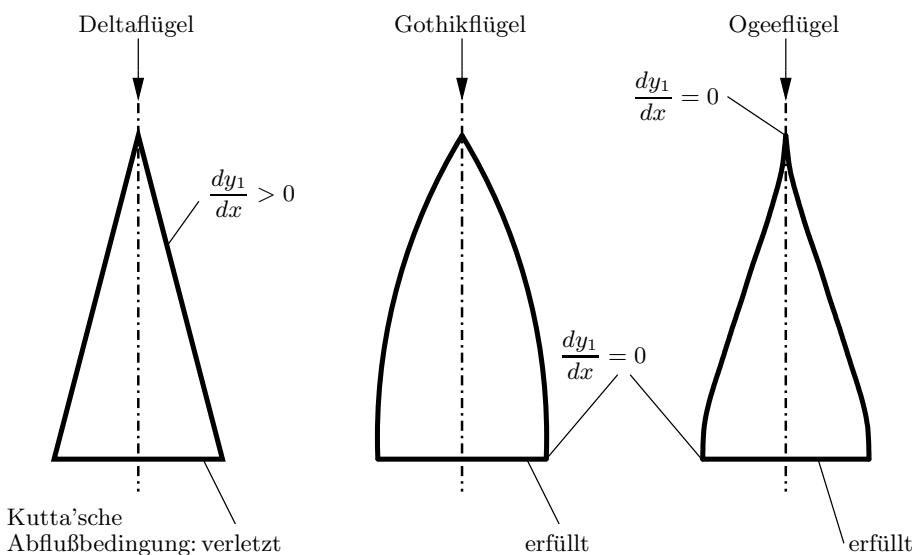
Für $y \rightarrow y_1$ ist $c_p \rightarrow \mp\infty$. Die Vorderkanten werden umströmt (Unterschallvorderkanten).

An dem Ergebnis ist bemerkenswert, dass $c_p \sim dy_1/dx$. Nur die Partien, in denen sich ein schlanker Flügel nach hinten erweitert, tragen zur Druckverteilung und damit zum Auftrieb bei. Einige Beispiele sind im Folgenden skizziert.

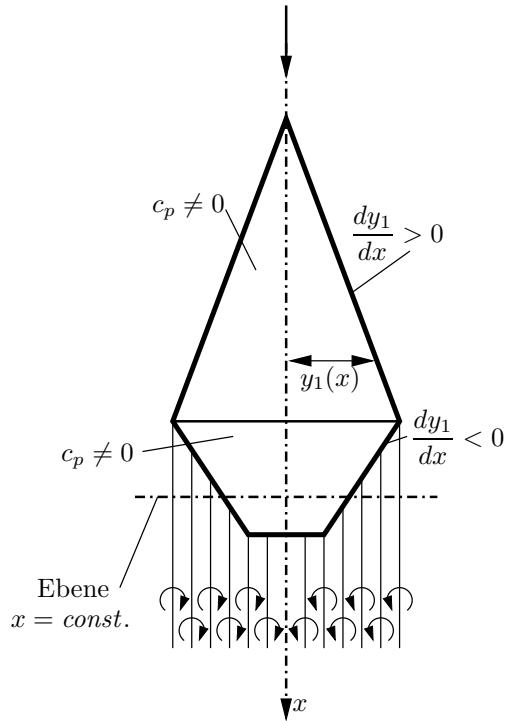


Auf den schraffierten Flächen ist $c_p = 0$, und sie tragen deshalb zum Auftrieb nicht bei. Ein Grenzfall ist der schlanke Rechteckflügel, bei dem die ganze Flügelfläche zum Auftrieb nicht beiträgt. An der Vorderkante ist die Schlankheitsbedingung verletzt. Dort ist $dy_1/dx = \infty$. Der Auftrieb selbst ist endlich, und er ist an der Vorderkante konzentriert.

Bei Deltaflügeln ist wegen $dy_1/dx = const.$ die Druckverteilung kegelsymmetrisch: Auf Strahlen $y/y_1 = const.$ ist $c_p = const.$. Bei Unterschallströmung ist daher die Kutta'sche

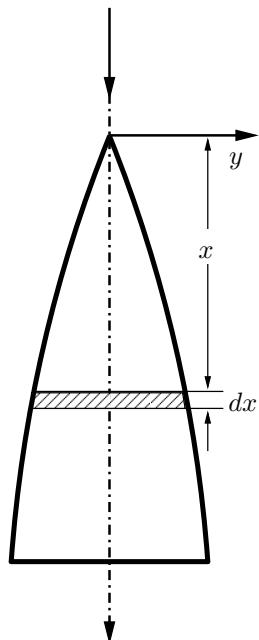


Abflussbedingung verletzt. An der Hinterkante existiert ein endlicher Drucksprung. In Sonderfällen (z.B. Gotikflügel, Ogeeblätter wie bei „Concorde“) ist bei einer örtlichen Neigung ($dy_1/dx)_h = 0$ die Kutta'sche Abflussbedingung erfüllt.



Abschnitte eines Flügels, in denen eine Verkleinerung der örtlichen Halbspannweite $dy_1/dx < 0$ vorliegt, besitzen ebenfalls eine (negative) Druckverteilung, $c_p \neq 0$. Solche Abschnitte sind aus den vorliegenden Betrachtungen zunächst auszuschließen, weil in diesem Bereich in der Ebene $x = \text{const.}$ andere Strömungsverhältnisse mit einer freien Wirbelschicht neben dem Flügel vorliegen, so dass dort ein anderes 2D-Problem als das hier betrachtete gelöst werden muss.

Für den Auftrieb dA eines Streifens dx folgt aus der Druckverteilung



$$dA = \int_{-y_1(x)}^{+y_1(x)} (p_{un} - p_{ob}) dy dx .$$

Mit

$$p_{un} - p_{ob} = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 (c_{p_{un}} - c_{p_{ob}})$$

ergibt sich

$$dA = q_\infty 4\alpha y_1 \frac{dy_1}{dx} \underbrace{\int_{-1}^{+1} \frac{d\left(\frac{y}{y_1}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{y_1}\right)^2}}}_{\pi} dx .$$

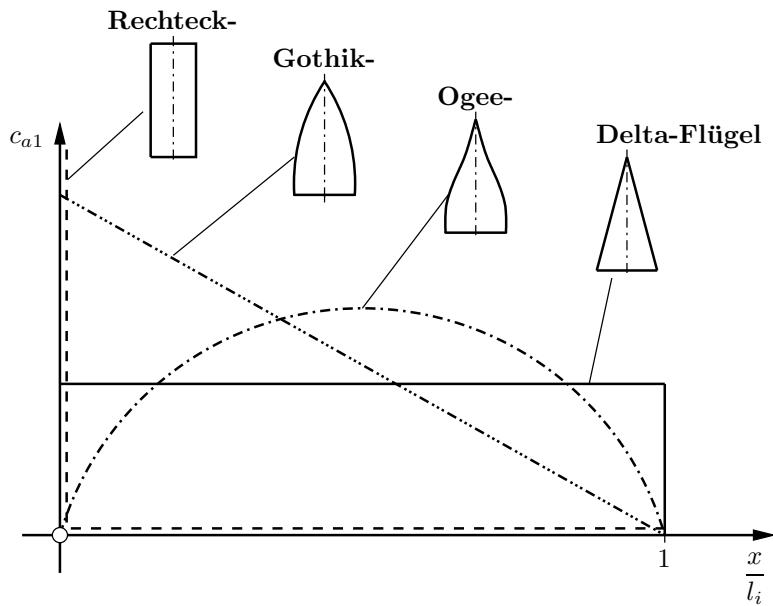
Mit der Lösung des Integrals ist

$$\frac{dA}{dx} = 4\pi\alpha q_\infty y_1 \frac{dy_1}{dx} = 2\pi\alpha q_\infty \frac{d(y_1^2)}{dx} .$$

Bildet man einen örtlichen Auftriebsbeiwert

$$c_{a1} = \frac{dA}{q_\infty 2y_1 dx} = 2\pi\alpha \cdot \frac{dy_1}{dx},$$

so ergibt sich wieder, dass nur die Bereiche des Flügels beitragen, in denen sich die örtliche Halbspannweite in x -Richtung ändert. Die Verteilung des örtlichen Auftriebsbeiwertes in x -Richtung ist vom Grundriss abhängig. Die Verläufe sind für die verschiedenen diskutierten Grundrisse in der Skizze dargestellt.



Für den Gesamtauftrieb folgt durch Integration über alle Streifen

$$\begin{aligned} A &= \int_{x=0}^{x=l_i} dA = 2\pi\alpha q_\infty \int_{y_1=0}^{y_1=b/2} d(y_1^2) = 2\pi\alpha q_\infty \cdot \frac{b^2}{4} \\ A &= \frac{\pi}{2}\alpha q_\infty b^2 . \end{aligned}$$

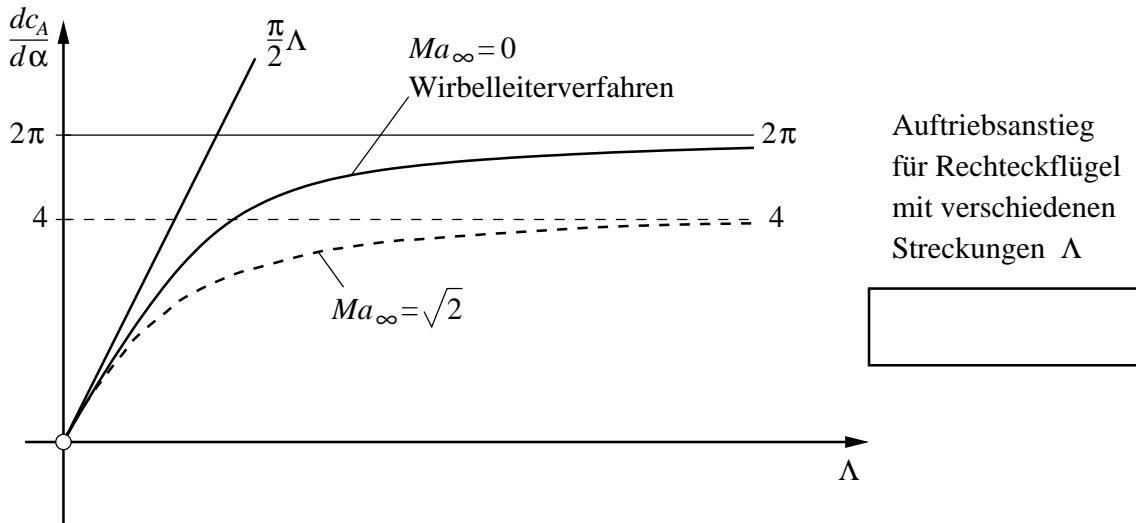
Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Grundrissform $y_1(x)$. Alle schlanken Flügel mit gleicher Spannweite b besitzen den gleichen Auftrieb (unabhängig davon, auf welche Weise $y_1(x)$ sich die örtliche Halbspannweite von Null an der Flügelspitze auf $s = b/2$ an der Hinterkante erweitert hat). Für den Auftriebsbeiwert folgt

$$c_A = \frac{A}{q_\infty S} = \frac{\pi}{2}\Lambda \cdot \alpha$$

und

$$\boxed{\frac{dc_A}{d\alpha} = \frac{\pi}{2}\Lambda .}$$

Dieses ist das berühmte Ergebnis der Theorie schlanker Körper von Jones (1946)⁶. Es stellt für alle Flügelgrundrissformen den Grenzfall für Flügel kleiner Streckung $\Lambda \rightarrow 0$ dar.



Die von den Ausführungen in den Kapiteln 2.4.2.1, 2.5.2 und 3.2.4 her bekannten Ergebnisse für Rechteckflügel sind zusammen mit dem Grenzwert der Theorie schlanker Körper in der Skizze für $Ma_\infty = 0$ und $Ma_\infty = \sqrt{2}$ noch einmal dargestellt. Die angegebene Verteilung für $Ma_\infty = \sqrt{2}$ und Streckungen $\Lambda < 1$ ergibt sich aus den in dieser Vorlesung nicht behandelten Singularitätenverfahren für den Überschall [1].

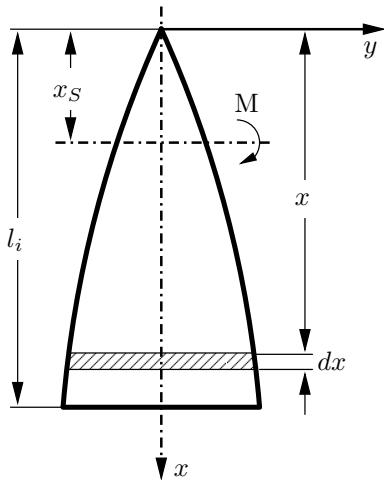
Für den Widerstandsbeiwert gilt bei der Theorie schlanker Körper wegen der elliptischen Zirkulationsverteilung

$$c_{Wi} = \frac{c_A^2}{\pi\Lambda} = c_A \cdot \frac{\alpha}{2} .$$

Die resultierende Luftkraft steht also nicht senkrecht auf dem Flügel ($c_W = c_A \cdot \alpha$), sondern es tritt eine Saugkraft auf, für deren Beiwert gilt

$$c_S = c_A \cdot \alpha - c_A \cdot \frac{\alpha}{2} = c_A \cdot \frac{\alpha}{2} .$$

⁶**R. T. Jones:** Properties of low-aspect-ratio pointed wings at speeds below and above the speed of sound. NACA Rep. Nr. 835 (1946).



Für den Beitrag des Streifens dx zum Nickmoment um eine beliebige Achse bei x_S gilt

$$dM = -(x - x_S)dA .$$

Setzt man das Ergebnis für den Auftrieb ein, so folgt

$$M = - \int_{x=0}^{x=l_i} (x - x_S)dA = -2\pi\alpha q_\infty \int_0^{x=l_i} (x - x_S)d(y_1^2) ,$$

und eine partielle Integration liefert

$$M = -2\pi\alpha q_\infty \left[(l_i - x_S) \frac{b^2}{4} - \int_0^{l_i} y_1^2 dx \right] ,$$

und der Momentenbeiwert ist dann

$$c_M = \frac{M}{q_\infty Sl_\mu} = -\frac{2\pi\alpha}{Sl_\mu} \left[(l_i - x_S) \frac{b^2}{4} - \int_0^{l_i} y_1^2 dx \right] .$$

Der Nickmomentenbeiwert ist demnach vom Grundrissverlauf $y_1(x)$ abhängig. Die Auswertung für Deltaflügel mit

$$S = \frac{b \cdot l_i}{2} ; \quad l_\mu = \frac{2}{3}l_i ; \quad \Lambda = \frac{2b}{l_i} ; \quad y_1(x) = \frac{\Lambda}{4}x$$

liefert nach elementarer Rechnung

$$c_M = -\frac{2\pi\alpha}{Sl_\mu} \left[(l_i - x_S) \frac{b^2}{4} - \frac{\Lambda^2 l_i^3}{16} \right]$$

$$c_M = -\frac{3}{4}\pi\alpha\Lambda \left[\frac{2}{3} - \frac{x_S}{l_i} \right]$$

und

$$\frac{dc_M}{d\alpha} = -\frac{3}{4}\pi\Lambda \left[\frac{2}{3} - \frac{x_S}{l_i} \right] . \quad (\text{Deltaflügel})$$

Zur Bestimmung der Neutralpunktlage kann die Bedingung herangezogen werden, dass das Nickmoment um dem Neutralpunkt $x_S = x_N$ vom Anstellwinkel unabhängig ist. Deshalb muss gelten

$$\left(\frac{dc_M}{d\alpha} \right)_{x_S=x_N} = 0 .$$

Dies ist nur möglich, falls

$$\boxed{\frac{x_N}{l_i} = \frac{2}{3}. \quad \text{Deltaflügel}}$$

Beim Deltaflügel ist die Druckverteilung nach der Theorie schlanker Körper kegelsymmetrisch und der Druckpunkt liegt bei

$$\boxed{\frac{x_D}{l_i} = \frac{2}{3},}$$

und für ebene Flügel ($c_{M0} = 0$) ist $x_D = x_N$.

4.3 Zusammenstellung aerodynamischer Beiwerte

In den vorausgehenden Abschnitten hatte sich ergeben, dass sich die aerodynamischen Beiwerte für schlanke Flügel, insbesondere beim Auftriebsproblem, teilweise auf sehr einfache Weise berechnen lassen. Im Folgenden werden die aerodynamischen Beiwerte von schlanken Deltaflügeln ohne und mit Zuspitzung λ zusammengestellt.

Die Ergebnisse nach der Theorie werden ohne Beweis mitgeteilt. Es werden jedoch einige zusätzliche Erläuterungen gegeben:

- Die Erweiterung der bisherigen Ausführungen auf zugespitzte Flügel ist ohne weiteres möglich. Die hinteren Teile tragen wegen $dy_1/dx = 0$ nicht zur Druckverteilung bei.
- Nickende Flügel (c_{Ay} und c_{My}) können durch Erweiterung von $\alpha = \text{const.}$ auf $\alpha = \alpha(x)$ behandelt werden (quasistationär).
- Bei instationären Strömungen lautet die Potentialgleichung

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} - \frac{1}{a_\infty^2} \varphi_{tt} = 0 \quad ,$$

und für $\alpha = \dot{\alpha}t$ reduziert sich die Potentialgleichung auf

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad ,$$

aber für die Druckverteilung gilt dann

$$c_p = -\frac{2}{V_\infty} \left(\varphi_x + \frac{1}{V_\infty} \varphi_t \right) \quad .$$

Aus der Lösung

$$\varphi(x, y, 0, t) = \pm \dot{\alpha}t V_\infty \sqrt{y_1^2 - y^2}$$

folgt für den Zeitpunkt $t = 0$

$$c_p = \mp \frac{2}{V_\infty} \dot{\alpha} \sqrt{y_1^2 - y^2} \quad .$$

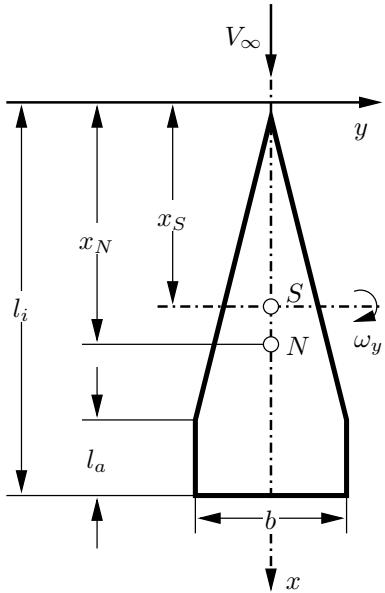
Die Druckverteilung ist im ersten Moment der Beschleunigung elliptisch. Bereiche des Flügels mit $dy_1/dx = 0$ tragen bei. Später ($t \neq 0$) kommen noch stationäre Anteile hinzu. Die Integration über die Druckverteilung liefert die eingetragenen Ergebnisse.

- Schiebende Flügel werden durch Addition einer Quergeschwindigkeit $V_\infty \cdot \beta$ behandelt. Für den Druckbeiwert gilt dann

$$c_p = -\frac{2}{V_\infty} (\varphi_x + \beta \varphi_y) \quad .$$

Aus dem unsymmetrischen Anteil $\beta \varphi_y$ resultiert das in den Formeln angegebene Schieberollmoment.

Zusammenstellung der aerodynamischen Beiwerte von dünnen Deltaflügeln nach der Theorie schlanker Körper.



$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{l_a}{l_i} & \Lambda &= \frac{b^2}{S} = \frac{2b}{l_i(1 + \lambda)} \\
 S &= \frac{1}{2} b l_i (1 + \lambda) & l_\mu &= \frac{2}{3} l_i \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{1 + \lambda} \\
 \frac{x_N}{l_i} &= \frac{2}{3} (1 - \lambda) & \Omega_y &= \frac{\omega_y l_\mu}{V_\infty} \\
 c_A &= \frac{A}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 S} & c_M &= \frac{M}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 S l_\mu} \\
 c_L &= \frac{L}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 S \frac{b}{2}}
 \end{aligned}$$

- 1) $c_{A\alpha} = \frac{\partial c_A}{\partial \alpha} = \frac{\pi}{2} \Lambda$
- 2) $c_{M\alpha} = \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} = -\frac{3}{4} \pi \Lambda \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda + \lambda^2} \left[\frac{2}{3} (1 - \lambda) - \frac{x_S}{l_i} \right]$
- 3) $c_{Ay} = \frac{\partial c_A}{\partial \Omega_y} = +\frac{3}{4} \pi \Lambda \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda + \lambda^2} \left(1 - \frac{x_S}{l_i} \right)$
- 4) $c_{My} = \frac{\partial c_M}{\partial \Omega_y} = -\frac{3}{8} \pi \Lambda \frac{(1 + \lambda)^2}{(1 + \lambda + \lambda^2)^2} \left[3 \left(\frac{x_S}{l_i} \right)^2 + (2\lambda - 5) \frac{x_S}{l_i} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{4}\lambda^2 \right]$
- 5) $c_{A\dot{\alpha}} = \frac{\partial c_A}{\partial \left(\frac{\dot{\alpha} l_\mu}{V_\infty} \right)} = \frac{1}{4} \pi \Lambda \frac{(1 + \lambda)(1 + 2\lambda)}{1 + \lambda + \lambda^2}$
- 6) $c_{M\dot{\alpha}} = \frac{\partial c_M}{\partial \left(\frac{\dot{\alpha} l_\mu}{V_\infty} \right)} = +\frac{3}{8} \pi \Lambda \frac{(1 + \lambda)^2}{(1 + \lambda + \lambda^2)^2} \left[(1 + 2\lambda) \frac{x_S}{l_i} - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{4}\lambda^2 \right) \right]$
- 7) $c_{Ay} + c_{A\dot{\alpha}} = \frac{3}{4} \pi \Lambda \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda + \lambda^2} \left(\frac{4 + 2\lambda}{3} - \frac{x_S}{l_i} \right)$
- 8) $c_{My} + c_{M\dot{\alpha}} = -\frac{9}{8} \pi \Lambda \frac{(1 + \lambda)^2}{(1 + \lambda + \lambda^2)^2} \left(1 - \frac{x_S}{l_i} \right)^2$
- 9) $c_{L\beta} = \frac{\partial c_L}{\partial \beta} = \frac{2}{3} \pi \alpha \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda}$

4.4 Literatur zu Kapitel 4

- [1] H. Schlichting, E. Truckenbrodt: Aerodynamik des Flugzeuges, Band I/II, 3. Auflage. Springer Verlag Berlin, 2001.
- [2] J. Katz, A. Plotkin: Low-Speed Aerodynamics, Second Edition. Cambridge University Press, 2001.
- [3] R. T. Jones: Properties of low-aspect ratio pointed wings at speeds below and above the speed of sound. NACA Rep. Nr. 835, 1946.
- [4] Mac C. Adams, W. R. Sears: Slender body theory - Review and extension. J. Aeron. Sci., Vol. 20 (1953), pp. 85-98.
- [5] D. Hummel: Berechnung der Druckverteilung an schlanken Flugkörpern mit beliebiger Grundriß- und Querschnittsform in Unter- und Überschallströmung. DGLR Jahrbuch 1968, S. 158-173.
- [6] D. Hummel: Aerodynamik II - Einführung in die Tragflügeltheorie. Fachbereich Maschinenbau der TU Braunschweig, 2003.